



## Forskydning i jernbetonbjælker

**Sørensen, Hans Christian**

*Publication date:*  
1970

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Sørensen, H. C. (1970). *Forskydning i jernbetonbjælker*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-019

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

AFDELINGEN FOR  
BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Hans Christian Sørensen  
FORSKYDNING I JERNBETONBJÆLKER

RAPPORT NR. R 19 1970

Hans Christian Sørensen  
FORSKYDNING I JERNBETONBJÆLKER

RAPPORT NR. R 19 1970



## Forord

Denne afhandling er sammen med forsøgsrapporten [70.1] udarbejdet som led i betingelserne for erhvervelsen af den tekniske licentiatgrad.

Licentiatstudiets hovedemne er

"Giv en oversigt og vurdering af teori og forsøg angående forskydningsarmering af jernbetonbjælker, eventuelt suppleret med egne forsøg."

Studiet er udført hos professor, dr. tech. K.W. Johansen ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole. Dr. tech. H. Krenchel har virket som vejleder.

I forbindelse med udarbejdelsen af afhandlingen har jeg herudover modtaget værdifuld bistand fra en lang række af afdelingens medarbejdere.

København den 2. oktober 1970.

Hans Chr. Sørensen

## Resumé

Afhandlingen omhandler forskydningsoptagelsen hos prismatiske jernbetonbjælker, der er påvirket til kombineret bøjning og forskydning og er udarbejdet på grundlag af en undersøgelse af forsøg og teorier om forskydningspåvirkede jernbetonbjælker. Der er foretaget et systematisk litteraturstudium for perioden 1960-1969. Endvidere er der i litteraturoversigten medtaget nogle væsentlige publikationer fra før 1960.

Afhandlingen er opdelt i 5 hovedafsnit, hvor afsnit 1 består af en indledning og en kort historisk oversigt, mens afsnit 5 indeholder litteraturoversigten.

Afsnit 2 behandler dannelsen af diagonalrevner, de parametre, der har størst indflydelse på diagonalrevnelasten og nogle formler til bestemmelse af diagonalrevnelasten. Det fremgår heraf, at der findes to forskellige typer diagonalrevner: 1) bøjningsforskydningsrevner, der er den mest almindelige type, og 2) forskydningstrækrevner, der kun dannes ved slanke T- og I-bjælker. Årsagen til dannelsen af diagonalrevner skyldes i begge tilfælde, at hovedtrækspændingerne overskrider betonens trækstyrke. Diagonalrevnedannelsen er uafhængig af en forskydningsarmering i form af bøjler, mens en opbøjet trækarmring derimod kan give anledning til for tidlig revnedannelse. Bøjningsforskydningsrevnelasten  $\tau_{cr}$  kan tilnærmet regnes afhængig af betonens trækstyrke, armeringsforholdet og bøjningsmomentet divideret med forskydningskraften gange nyttehøjden. Forskydningstrækrevnelasten vil tilnærmet alene afhænge af betonens trækstyrke.

Afsnit 3 omhandler forskydningsbrudformer og forskydningsbrudlastens størrelse for bjælker uden forskydningsarmering. Det fremgår heraf, at forskydningsbrudlasten i praksis må regnes lig diagonalrevnelasten, og at forskydningsbruddet er uvarslet. Afsnittet er derfor forholdsvis kort, idet kun forhold, der har betydning for afsnit 4, er behandlet.

Afsnit 4 behandler forskydningsarmeringens virkemåde og de parametre, der har betydning for forskydningsbrudlasten.

Det fremgår heraf, at anvendelsen af forskydningsarmering i form af opbøjet armering må frarådes, og at forskydningsbrudlasten  $\tau_u$  kan opfattes som bestående af et bidrag fra forskydning i betonens trykzone og et bidrag fra træk i bøjlerne. Disse to bidrag vil være afhængige af hinanden, men forskydningsbrudlasten kan på den sikre side beregnes efter en modificeret Gitteranalogi, hvor diagonalrevnelasten udgør betontrykzonens bidrag, og bøjlernes bidrag svarer til en diagonalrevnehældning på  $45^\circ$ . Nyere formler, hvor de to bidrag kædes sammen ved diagonalrevnens middelhældning, giver dog bedre overensstemmelse med forsøg. Til slut i afsnittet er nævnt nogle uafklarede områder, bl.a. 1) brudlasten for bjælker med relativt svag forskydningsarmering, hvor bøjlernes hældning varieres, 2) brudlasten for bjælker, hvor bøjlernes flydespænding er større end  $4500 \text{ kp/cm}^2$ , 3) brudlasten for bjælker med relativt kort forankringszone for længdearmeringen, herunder indstøbte bjælker, og 4) brudlasten for bjælker med gentagende belastning større end diagonalrevnelasten.

Afhandlingen omfatter endvidere et appendix, hvor forskydningsbæreevnen for variabel bøjlevinkel  $\alpha$  er undersøgt for en række beregningsformler, hvoraf nogle af forfatteren er udvidet til at omfatte skråbøjler. For samtlige formler gælder, at den teoretiske forskydningsbæreevne for fastholdt forskydningsarmeringsforhold  $\bar{m}_{t0}$  har et maksimum i intervallet  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

## Indholdsfortegnelse.

Forord	1
Resumé	2
Indholdsfortegnelse	4
Bogstavsymboler	7
1. Indledning.	11
1.1 Afhandlingens omfang	11
1.2 Historie	12
2. Revnedannelse i bjælker med og uden forskydnings- armering.	14
2.1 Diagonalrevnedannelsen	14
2.2 Væsentlige parametre	17
2.2.1 Betonstyrke	20
2.2.2 Længdearmering	22
2.2.3 $\frac{M}{Th}$ -forhold	24
2.2.4 Bjælkehøjde, bjælkebredde	26
2.2.5 Tværsnitsform	27
2.2.6 Belastnings- og understøtningsform	29
2.3 Beregningsformler	29
2.3.1 Viest (ACI-ASCE)	30
2.3.2 Kani	31
2.3.3 Kennedy, Zsutty	33
2.3.4 Regan	34
2.3.5 Sammenligning af beregningsformler	36
2.4 Resumé	40
3. Brudlast for bjælker uden forskydningsarmering.	42
3.1 Kraftomlejring	42
3.2 Buevirkning	44
3.3 Brudform	46
3.3.1 Bøjningsbrud. $6 < a/h$	47



3.3.2	Diagonalt trækbrud.	$3 < a/h < 7$	47
3.3.3	Forskydningstrykbrud.	$1 < a/h < 3$	47
3.3.4	Forskydningstrækbrud.	$2 < a/h < 4$	48
3.3.5	Buestabilitetsbrud.	$1 < a/h < 4$	49
3.3.6	Konklusion		49
3.4	Væsentlige parametre		49
3.4.1	Relativ forskydningsspændvidde $a/h$		50
3.4.2	Længdearmering		51
3.4.3	Betonstyrke		52
3.4.4	Tværsnitsform		53
3.4.5	Belastningsform		53
3.5	Beregningsformler		55
3.5.1	Statiske betingelser		55
3.5.2	Fysiske betingelser		56
3.5.3	Kompatibilitetsbetingelser		57
3.5.4	Bjuggren		57
3.5.5	Regan		58
3.5.6	Kennedy		59
3.5.7	Sammenligning af beregningsformler		59
3.6	Resumé		60
4.	Brudlast for bjælker med forskydningsarmering.		61
4.1	Forskydningsarmeringens virkemåde		61
4.2	Kraftomlejring		63
4.3	Brudform		66
4.3.1	Diagonalt trækbrud		67
4.3.2	Forskydningstrækbrud		67
4.3.3	Forskydningstrykbrud		69
4.3.4	Buestabilitetsbrud		69
4.3.5	Kroptrykbrud		69
4.4	Væsentlige parametre		71
4.4.1	Bøjler som forskydningsarmering		72
4.4.2	Opbøjet længdearmering (skråjern) som forskydningsarmering		74
4.4.3	Forskydningsarmering i bjælkeaksens retning		77
4.4.4	Dornvirkningens og betontrykzonens bidrag		77
4.4.5	Belastnings- og understøtningsform		79

4.5	Beregningsformler	80
4.5.1	Modificeret Gitteranalogi	81
4.5.2	Gvozdev, Hillerborg	83
4.5.3	Forskydningstrykbrudteori	86
4.5.4	Minimumsarmeringsteori, plasticitets- teori	88
4.5.5	Sammenligning af beregningsformler	90
4.6	Resumé	97
5.	Litteraturfortegnelse.	100
5.1	Kronologisk oversigt	100
5.2	Emnefortegnelse	109
Appendix A.		111
	Den forventede bøjningsbrudlast	111
Appendix B.		112
	Undersøgelse af forskydningsbæreevnen som funk- tion af bøjlevinklen	112
B	Indledning	112
B1	Modificeret Gitteranalogi	112
B2	Gvozdev, Hillerborg	114
B3	Forskydningstrykbrudteori	116
B4	Plasticitetsteori	117
B5	Resumé.	120
Summary		121

### Bogstavsymboler

De anvendte bogstavsymboler er for størstedelens vedkommende i overensstemmelse med CEB [69.16] og dermed også i overensstemmelse med, hvad der anvendes ved jernbetonundervisningen på Danmarks tekniske Højskole (Brøndum-Nielsen [69.13]). Følgende index er hyppigt anvendt

- a Længdearmering
- b Beton
- cr Diagonalrevnelast
- f Flydespænding (  $\sim 0,2\%$  blivende forlængelse)
- i Nummer
- m Minimums- eller maksimumsværdi
- t Forskydningsarmering
- u Brudlast
- A(B) Tilsvarende snitkraft henført til normalsnit  
A-A (B-B)
- F Forventet bøjningsbrudlast (Appendix A).

<u>Symbol</u>	<u>Betydning</u>
A	Tværsnitareal af armering.
E	Elasticitetskoefficient.
M	Bøjningsmoment.
$M_a, M_b, M_t$	Bøjningsmoment-andel optaget af henholdsvis længdearmering, betontrykzone og forskyd- ningsarmering.
$N_a$	Træknormalkraft i længdearmering.
$N_b$	Tryknormalkraft i beton.
T	Forskydningskraft.
$T_a, T_b, T_t$	Forskydningskraft-andel optaget af henholds- vis længdearmering, betontrykzone og for- skydningsarmering.
a	Forskydningsspændvidde (Fig. 2.2a).
b	Trykzonebredde.
$b_o$	Kropbredde.
c	Længde af diagonalrevnens projektion i bjælkeaksens retning.
h	Længdearmeringens nyttehøjde.
$h_t$	Bjælkens totalhøjde.
l	Spændvidde.
r	$\frac{M}{M_F}$ , M og $M_F$ taget i samme snit.
t	Afstand mellem forskydningsarmeringsstænger målt parallelt med bjælkeaksen.
z	Momentarm.
$\alpha$	Vinkel mellem bjælkeakse og forskydningsarme- ring.
$\epsilon$	Tøjning.
$\eta$	$\frac{M_b}{b_o z^2} \cot \theta$ (afsnit 4.5.3)

$\theta$	Idealiseret diagonalrevnevinkel.
$\kappa$	$\frac{T_b}{b_o h} \cot \theta$ (afsnit 4.5.2).
$\mu$	$\frac{M}{b_o h^2}$ (afsnit 4.5.3).
$\bar{w}_o$	Længdearmeringsforholdet $\frac{A_a}{bh}$ .
$\bar{w}_{ao}$	Længdearmeringsforholdet $\frac{A_a}{b_o h}$ (beregnet m.h.t. ) (kroppsbredde $b_o$ .)
$\bar{w}_{to}$	Forskydningsarmeringsforholdet $\frac{A_t}{b_o t \sin \alpha}$ .
$\sigma$	Spænding.
$\sigma_c$	Betonens cylindertrykstyrke.
$\sigma_t$	Betonens terningtrykstyrke (regnes lig $1.25 \sigma_c$ ).
$\sigma_{br}$	Betonens enaksede trækstyrke.
$\sigma_{bu}$	Betonens trykbrudstyrke.
$\tau$	Forskydningsspænding.
$\tau$	Nominal forskydningsspænding $\frac{T}{b_o h}$ .
$\tau'$	Nominal forskydningsspænding $\frac{T}{b_o z}$ .
$\tau_{uc}$	Nominal forskydningsspænding $\frac{T_u}{b_o h}$ ved forskydningstrykbrud.



## 1. Indledning

### 1.1 Afhandlingens omfang

Denne afhandling beskæftiger sig med diagonalrevnedannelsen og forskydningsbrudlasten for prismatiske jernbetonbjælker, der kan betragtes som plane, og som i et normal-snit er påvirket af et bøjende moment og en forskydningskraft.

Optagelsen af forskydningskræfter i jernbetonbjælker hører nok til et af de områder inden for emnet jernbeton, der har beskæftiget det største antal forskere. Til trods herfor må det konstateres, at der stadig er mange uafklarede problemer tilbage. Årsagen hertil er bl.a., at forskydningsoptagelsen afhænger af bjælkens revnedannelse, hvilket er medvirkende til, at bjælken må opfattes som et foranderligt system. Ved en forsøgsserie er det kun muligt at variere på nogle få af det betydelige antal parametre, der herved får indflydelse på forskydningsoptagelsen. Formålet med denne afhandling er at skabe det overblik over forskydningsproblemet, som det kan være vanskeligt at få ved gennemgang af nogle få forsøgsrapporter.

Afhandlingen består af 5 hovedafsnit, hvor der i afsnit 1 findes en indledning og en kort historisk oversigt. I afsnit 2 behandles diagonalrevnedannelsen og diagonalrevnelasten, i afsnit 3 forskydningsbrudlasten for bjælker uden forskydningsarmering og i afsnit 4 forskydningsbrudlasten for bjælker med forskydningsarmering. Hvert af afsnittene 2-4 kan opdeles i 3 underafsnit, der beskriver selve problemet, de væsentligste parametre og nogle beregningsformler. De 3 hovedafsnit 2-4 kan ikke læses fuldstændigt uafhængige af hinanden, således er bl.a. nogle brudformer fælles for afsnit 3 og 4, ligesom behandlingen af forskydningsarmeringens virkemåde er belyst gennem revneudviklingen hos bjælker uden forskydningsarmering.

I afsnit 5 findes en referenceliste og en emnefortegnelse. Undersøgelsen af forsøg og beregningsformler er hovedsagelig foretaget for publikationer fra perioden 1960-1969. Fra tiden før 1960 omfatter litteraturlisten kun publikatio-

ner, der er refereret i teksten, mens referencer fra 1970 kun delvis er indarbejdet i afhandlingen. Forskydningsforsøg og beregningsformler fra før 1960 er udførligt behandlet af bl.a. Laupa m.f. [55.1], ACI-ASCE [62.1] og Haugli [62.7].

Afhandlingen omhandler ikke forskydningsproblemer i forbindelse med varierende bjælkehøjde, forskydning i T- og I-bjælkers flanger og bjælker, der er påvirket af normalkræfter, vridningsmomenter eller dynamisk belastning. Forholdene for korte bjælker (skiver) og konsoller, hvor afstanden mellem reaktion og belastningssnit er mindre end en til to gange bjælkens nyttehøjde, er kun overfladisk berørt. Endvidere er forsøg og beregningsformler, der omhandler bjælker med glat længdearmring, ikke behandlet. Deciderede normforslag, hvor der ikke ligger nogen egentlig teori bag, er ikke omfattet af denne afhandling. Angående en undersøgelse af normforslag kan der henvises til bl.a. Hognestad [52.1], ACI-ASCE [62.1], Søpler [67.18] og Baker [69.11].

## 1.2 Historie

Den første betydende publikation om forskydningsarmring af jernbetonbjælker er af Ritter [1899.1]. Denne artikel ligger til grund for Gitteranalogien, der i de følgende år blev formuleret af Ritter og Mörsch, og som stadig danner grundlaget for de fleste landes jernbetonnormer. I de første årtier af dette århundrede blev der udført en lang række forsøg, der underbyggede denne teori. I Europa er det Mörsch, Bach og Graf, der præger udviklingen, og i U.S.A. er det Talbot. Konklusionen af disse forsøg er, at forskydningsoptagelsen kan opfattes at bestå af to bidrag: et fra betonen og et fra forskydningsarmeringen. Omkring 1920 bliver denne opfattelse i Europa ændret derhen, at betonen kun vil medvirke ved forskydningsoptagelsen indtil diagonalrevnedannelsen, hvorefter forskydningsarmeringen skal optage hele forskydningskraften. Årsagen til denne ændring skyldes bl.a. nye forsøg, hvor forskydningsarmeringen består af opbøjet længdearmring, og hvor der på grund af betontrykket ved



opbøjningspunktet foregår en knusning eller partiel spaltning af betonen. Forskellen mellem Europa og U.S.A. i opfattelse af betonens bidrag til forskydningsoptagelsen har bl.a. givet sig udslag i normerne. Først omkring begyndelsen af 60-erne er den førstnævnte konklusion igen blevet fremherskende også i Europa.

Forskydningsproblemet er i de sidste årtier blevet aktualiseret gennem 1) kravet om stadigt bedre udnyttelse af materialerne, 2) anvendelse af forkammet armering med relativt høj flydespænding og 3) en tendens til stadig mere slanke konstruktionselementer. Endvidere har forskydningsbrud i en amerikansk bygning i midten af 50-erne - AMC Warehouse Failure [57.2] - givet anledning til øget forskning på dette område.

En mere detaljeret historisk gennemgang falder uden for rammerne af denne afhandling, men kan bl.a. findes hos Hognestad [52.1] og ACI-ASCE [62.1].

## 2. Revnedannelse i bjælker med og uden forskydningsarmering.

### 2.1 Diagonalrevnedannelsen

Inden revnedannelsen kan en betonbjælke med god tilnærmelse betragtes som homogen, og betonens arbejdslinie som lineær-elastisk. Armeringen vil ikke have væsentlig indflydelse på spændingerne i betonen. Spændingerne i et normal-snit for en bjælke kan da udtrykkes som

$$\sigma_b = \frac{M}{I} y \quad (2.1)$$

$$\tau_b = \frac{T}{I} \frac{S^p}{b} \quad (2.2)$$

hvor  $I$  er tværsnittets transformerede inerti-moment og  $S^p$  det transformerede statiske moment af et deltværsnit omkring den vandrette tyngdepunktsakse. De øvrige betegnelser fremgår af fig. 2.1, hvor spændingsfordelingen er antydnet for en rektangulær bjælke.

Når normalspændingen i  $y$ -retningen betegnes  $\sigma_y$ , findes hovedspændingerne til

$$\begin{aligned} \sigma_{b1} \\ \sigma_{b2} \end{aligned} = \frac{1}{2}(\sigma_b + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_b - \sigma_y)^2 + 4\tau_b^2} \quad (2.3)$$

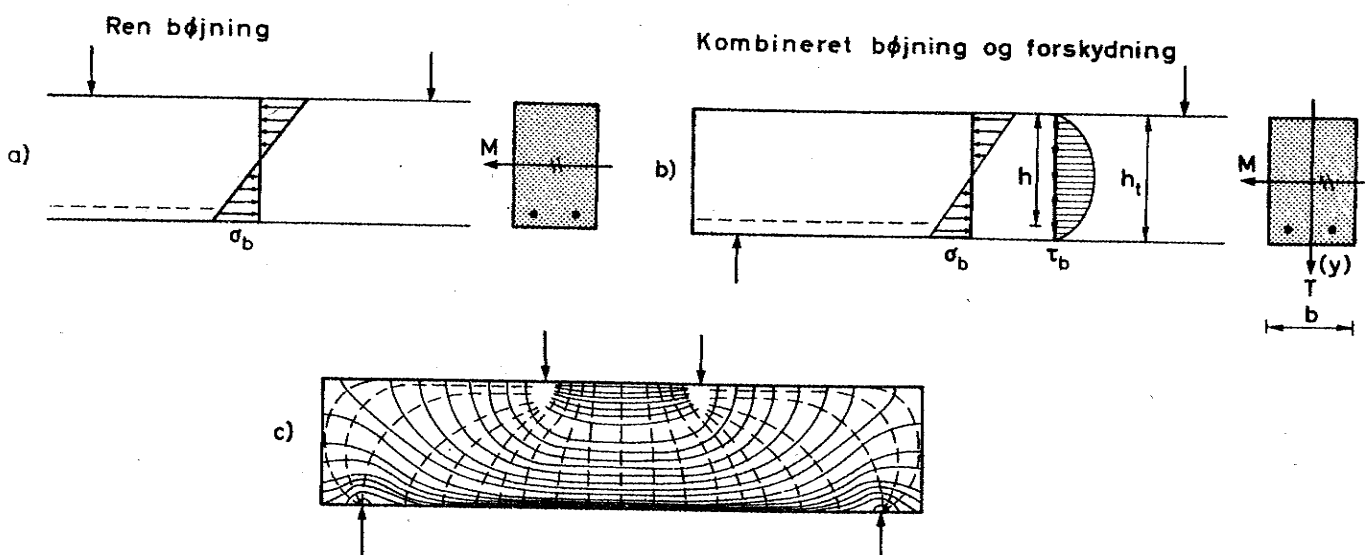


Fig. 2.1 Spændingsfordeling og spændingstrajektorier for urevnet homogen betonbjælke med rektangulært tværsnit.

og når vinklen mellem første hovedsnit og x-aksen betegnes  $\varphi$  findes

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau_b}{\sigma_b - \sigma_y} \quad (2.4)$$

Kun nær belastningspunkterne vil  $\sigma_y$  være af væsentlig betydning, hvorfor der ses bort fra  $\sigma_y$  i det følgende.

Revnedannelsen vil normalt følge det snit, hvor de største hovedtrækspændinger forekommer, hvorfor spændingstrajektorierne vil give et foreløbigt billede af revneforløbet. En begyndende revnedannelse vil imidlertid ændre beregningsforudsætningerne og således også revnebilledet. På fig. 2.1c er optegnet hovedspændingstrajektorierne beregnet efter ovennævnte formler ( $\sigma_y = 0$ ), idet belastningen består af to enkeltkræfter.

Den største hovedtrækspænding findes i bjælkens underside, i den del af bjælken, hvor det bøjende moment er størst. Derfor dannes først bøjningstrækrevner vinkelret på bjælkeaksen, som det er vist på fig. 2.2a. Længdearmeringen vil forhindre disse revner i at gennemskære bjælken, idet armeringen vil optage trækspændingerne.

Når belastningen øges, vil der ved rektangulære bjælker også dannes bøjningstrækrevner et stykke ud i forskydningsfaget. En eller flere af disse revner vil som følge af forskydningsspændingerne afbøjes mod belastningspunktet, som det er antydnet på fig. 2.2b. Disse revner betegnes bøjnings-forskydningsrevner.

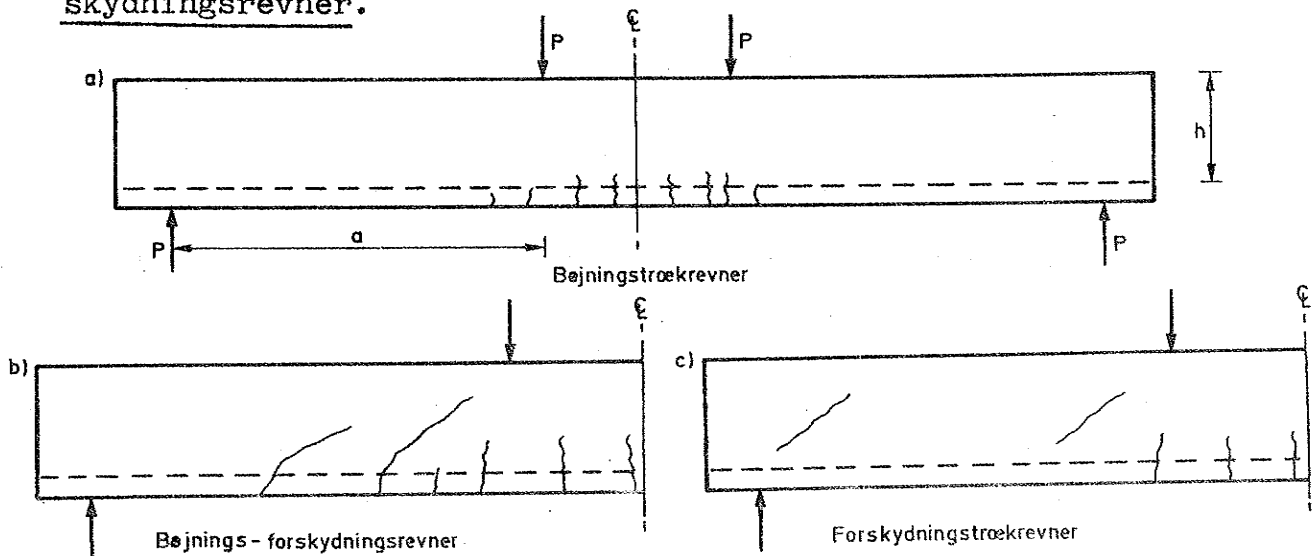


Fig. 2.2 Revnedannelse i jernbetonbjælke.

Ved T- og I-tværsnit med relativ tynd bjælkekrop  $b_0$  er der mulighed for, at den største hovedtrækspænding i forskydningsfaget ikke findes ved bjælkens underside, men ved bjælkens nullinie. Da spændingen i bjælkeaksens retning her er nul, danner største hovedtrækspænding en vinkel på  $45^\circ$  med bjælkeaksen (jfr. (2.4)). De revner, der herved opstår, betegnes forskydningstrækrevner. Deres forløb er antydnet på fig. 2.2c.

De to revneformer benævnes under et som diagonalrevner. Ud fra dannelsen af den første diagonalrevne defineres diagonalrevnelasten  $\tau'_{cr}$

$$\tau'_{cr} = \frac{T_{cr}}{b_0 z} \quad (2.5)$$

hvor  $b_0$  er bjælkekroppens tykkelse,  $z$  er momentarmen og  $T_{cr}$  er forskydningskraften, når en sådan skrå revne har nået tværsnittets nullinie. Af fig. 2.3 fremgår det, til hvilket snit forskydningskraften  $T_{cr}$  skal henføres.

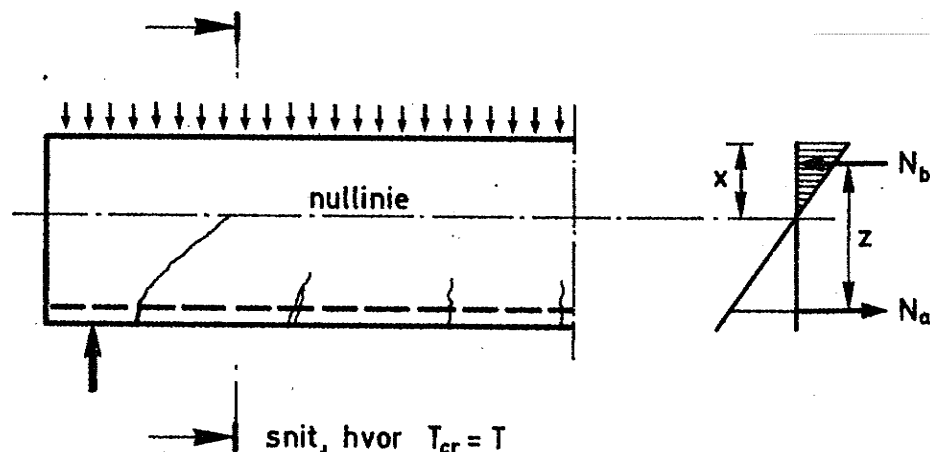


Fig. 2.3 Bestemmelse af diagonalrevnelasten.

Forskellige forskeres definition af, hvornår en skrå revne er udviklet til en diagonalrevne, giver anledning til usikkerhed ved sammenligning af forsøgsresultater. Dette definitionsspørgsmål er nøjere undersøgt af Swamy [69.12]. Problemet er størst for bjælker med jævnt fordelt belastning og for bjælker, hvor afstanden  $a$  (fig. 2.2) mellem reaktion og

belastning er mindre end ca. 3 gange bjælkens nyttehøjde. Dette skyldes, at diagonalrevnerne i disse tilfælde kun udvikles forholdsvis langsomt.

I definitionen (2.5) indgår momentarmen  $z$  og nulliniens beliggenhed  $x$  (se fig. 2.3), hvilket også kan medføre vanskeligheder ved bedømmelse af forsøgsresultater, idet disse størrelser er afhængige af de forudsætninger, der er gjort om tøjningsfordelingen og betonens arbejdslinie. Før dannelsen af forskydningstrækrevner er betonen normalt urevnet i det aktuelle område af bjælken, hvorfor det er mest korrekt at beregne  $x$  og  $z$  ud fra det urevnede tværsnit. Ved dannelsen af bøjnings-forskydningsrevner findes der allerede bøjningstrækrevner, og beregningen af  $x$  og  $z$  bør her foretages for det revnede tværsnit. I begge tilfælde vil det under hensyntagen til tøjningernes størrelse være en rimelig antagelse at regne med, at plane tværsnit forbliver plane, og at betonens arbejdskurve er lineær-elastisk.

For at undgå denne afhængighed af  $z$  anvendes i de fleste tilfælde ved afbildning af forsøgsresultater og ved opstilling af beregningsudtryk udtrykket

$$\tau_{cr} = \frac{T_{cr}}{b_o h} = \tau_{cr}^i \frac{z}{h} \quad (2.6)$$

for diagonalrevnelasten. Dette vil også være tilfældet i denne afhandling.

Diagonalrevnelasten er i hovedsagen uafhængig af en eventuel forskydningsarmering bestående af bøjler, hvilket er konstateret ved en lang række forsøg. Således har Kennedy [67.8] ved en regressionsanalyse af et betydeligt antal forsøg fundet, at diagonalrevnelasten inden for 5%'s significansniveau er uafhængig af tilstedeværelsen af bøjler. Forskydningsarmering i form af ophøjet langedearmering kan derimod medføre for tidlig diagonalrevnedannelse, jfr. afsnit 4.4.2.

## 2.2 Væsentlige parametre

Af afsnit 2.1 fremgår det, at der opstår diagonalrevner, når den største hovedtrækspænding  $\sigma_{b1}$  overskrider betonens

enaksede trækstyrke  $\sigma_{br}$ . Det er muligt, at danne sig et skøn over diagonalrevnelastens størrelse ved anvendelse af (2.3) og (2.4), idet  $\sigma_{b1}$  sættes lig  $\sigma_{br}$ . Når  $\sigma_y = 0$  findes af (2.3)  $\tau_b$  udtrykt ved  $\sigma_{br}$  og forholdet  $\frac{\sigma_b}{\tau_b}$

$$\tau_b = \sigma_{br} \cdot \left( \sqrt{\left( \frac{\sigma_b}{2\tau_b} \right)^2 + 1} - \frac{\sigma_b}{2\tau_b} \right) \quad (2.7)$$

Indsættes  $\frac{\sigma_b}{\tau_b}$  fra (2.4) findes

$$\tau_b = \sigma_{br} \cdot \tan \phi \quad (2.8)$$

hvor  $0 < \tan \phi \leq 1$ .

Ved dannelsen af forskydningstrækrevner er som tidligere nævnt  $\tan \phi = 1$ , hvorved  $\tau_b = \sigma_{br}$ . Indsættes  $T = T_{cr}$  i (2.2), idet det statiske moment  $S_o^D$  af deltværsnittet taget om nul-linien, er

$$S_o^D = z I \quad (2.9)$$

bliver diagonalrevnelasten

$$\tau_{cr}' = \tau_b = \sigma_{br} \quad (2.10)$$

Ved dannelsen af forskydningstrækrevner kan det forventes, at diagonalrevnelasten således kun afhænger af betonens trækstyrke.

I ovenstående udledning er det forudsat, at betonen kan regnes lineær-elastisk. Denne forudsætning gælder som tidligere nævnt med tilstrækkelig god tilnærmelse, når der opstår forskydningstrækrevner, idet der normalt ikke findes bøjnings-trækrevner i den pågældende del af forskydningsfaget.

Ved dannelsen af bøjnings-forskydningsrevner er det muligt at få et indtryk af hvilke parametre, der har betydning for diagonalrevnelasten ved nedenstående betragtninger, der delvis skyldes Viest m.f. (beskrevet i ACI-ASCE [62.1]).

Bøjningsmomentet og dermed også trækraften  $N_a$  i længdearmeringen er aftagende mod understøtningen. Der vil derved opstå forskydningskræfter mellem længdearmering og beton. Når afstanden fra understøtning til det betragtede snit

betegnes  $x$ , bliver forskydningskraften pr. længdenhed  $\frac{dN_a}{dx}$ .  
 Fordeles  $\frac{dN_a}{dx}$  jævnt over bjælkebredden  $b_o$  findes i middel en forskydningsspænding  $\tau$  i betonen, hvor

$$\tau = \frac{1}{b_o} \cdot \frac{dN_a}{dx} \quad (2.11)$$

Når trækzonen er revnet, kan  $N_a$  nær maksimalmomentet udtrykkes, som

$$N_a = \frac{M}{z} \quad (2.12)$$

hvor  $z$  er momentarmen. Differentieres (2.12) m.h.t.  $x$  og indsættes i (2.11), findes

$$\tau = \frac{1}{b_o z} \frac{dM}{dx} - \frac{M}{b_o z^2} \frac{dz}{dx} \quad (2.13)$$

Idet der kun betragtes bjælker med parallel over- og under- side, kan  $z$  antages uafhængig af  $x$ , og da  $T = \frac{dM}{dx}$  fås

$$\tau = \frac{T}{b_o z} \quad (2.14)$$

Denne forskydningsspænding  $\tau$  svarer til de forskydningsspændinger  $\tau_b$  (efter (2.2)), der optages af beton i det urevnede stadium. Det synes derfor rimeligt, at beregne diagonalrevnelasten af (2.14) og (2.7) idet

$$\tau_b = \tau = \tau'_{cr} \quad (2.15)$$

Trækspændingen parallel med bjælkeaksen  $\sigma_b$ , kan beregnes af Hookes lov, idet  $\sigma_b$  er mindre end  $\sigma_{br}$

$$\sigma_b = E_b \epsilon_b \quad (2.16)$$

hvor  $E_b$  er betonens elasticitetsmodul og  $\epsilon_b$  er tøjningen i betonen. Når  $\epsilon_b$  forudsættes proportional med tøjningen i armeringen  $\epsilon_a$ , hvor  $\epsilon_a$  kan beregnes af (2.12), findes

$$\sigma_b = k \frac{E_b}{E_a} \frac{M}{A_a z} \quad (2.17)$$

$A_a$  er længdearmeringens tværsnitsareal,  $E_a$  dens elasticitetsmodul, og  $M$  er bøjningsmomentet i det betragtede snit.  $k$  forudsættes at være en konstant mindre end 1, idet  $\epsilon_b < \epsilon_a$ .

Forholdet mellem  $\sigma_b$  og  $2\tau_b$  findes herefter af (2.15) og (2.17)

$$\frac{\sigma_b}{2\tau_b} = \frac{1}{2} k \frac{E_b}{E_a} \frac{M}{Th} \frac{1}{\bar{w}_{ao}} \quad (2.18)$$

hvor armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao} = \frac{A_a}{b_o h}$  er indført. For det snit, der betragtes, er forholdet  $\frac{M}{Th}$  en konstant, der kun afhænger af belastningstype og bjælkens geometri. Af (2.7) og (2.15) fås diagonalrevnelasten

$$\tau'_{cr} = \frac{\sigma_{br}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} k \frac{E_b}{E_a} \frac{M}{Th} \frac{1}{\bar{w}_{ao}}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2} k \frac{E_b}{E_a} \frac{M}{Th} \frac{1}{\bar{w}_{ao}}}} \quad (2.19)$$

Af (2.19) fremgår det, at diagonalrevnelasten  $\tau'_{cr}$  kan forventes at vokse med stigende armeringsforhold  $\bar{w}_{ao}$ , aftagende  $\frac{M}{Th}$  - forhold og stigende betontrykstyrke ( $\sigma_{br}$  vil stige stærkere end  $E_b$ , når betontrykstyrken øges, se f.eks. Brøndum-Nielsen [69.13]). Variationen  $\tau'_{cr}$  er imidlertid afgrænset af, at forsøg viser, at  $\tau'_{cr}$  altid er større end  $\frac{1}{2}\sigma_{br}$ , mens (2.10) viser, at  $\tau'_{cr}$  må forventes at være mindre end  $\sigma_{br}$ .

I det følgende vil indflydelsen fra de enkelte parametre blive belyst ved forsøgsresultater fra simpelt understøttede bjælker, idet diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  betragtes. Afhængigheden af de enkelte parametre bliver her yderligere kompliceret, idet forholdet mellem momentarmen  $z$  og nyttehøjden  $h$  indgår i (2.6). For rektangulære bjælker vokser  $\frac{z}{h}$  med aftagende værdi af  $\frac{E_a}{E_b} \bar{w}_{ao}$  (se f.eks. Brøndum-Nielsen [69.13]), hvilket sammenholdt med (2.19) forøger betontrykstyrkens indflydelse ( $E_b$ ) og formindsker armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ 's indflydelse på  $\tau_{cr}$ . I afsnit 2.2.6 vil forholdene for andre understøtningsformer blive behandlet.

### 2.2.1 Betonstyrke

Diagonalrevnelasten sættes normalt i relation til betontrykstyrken  $\sigma_c$  i stedet for den enaksede trækstyrke  $\sigma_{br}$ . Dette skyldes to forhold, dels at kendskabet til betonens trækstyrke er forholdsvis ringe og dels at elasticitets-



modulen  $E_p$  indgår både i  $z/h$  og i nævneren i (2.19). På fig. 2.4 er vist diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  som funktion af cylinderstyrken  $\sigma_c$  for forsøg af Moody m.f. [54.2].

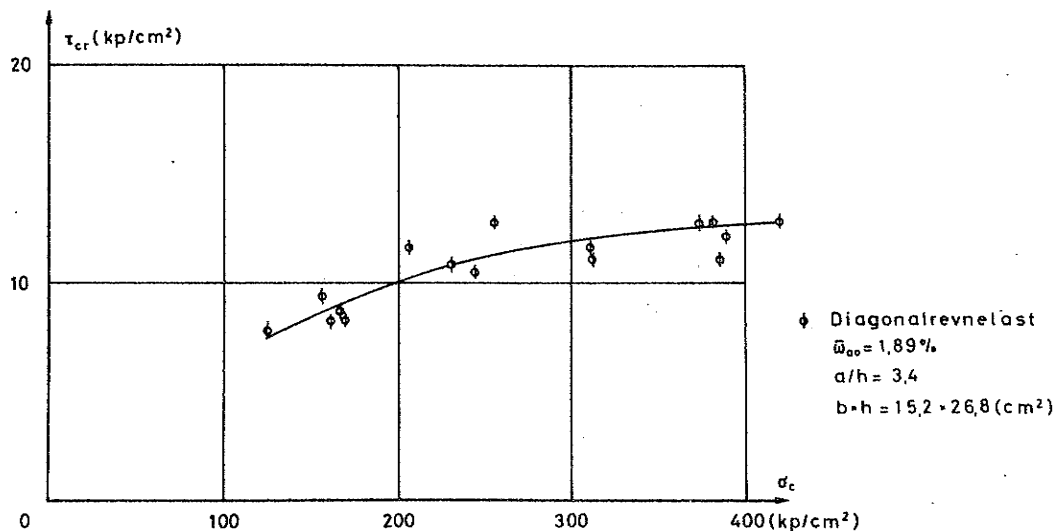


Fig. 2.4 Diagonalrevnelastens afhængighed af betonens cylinderstyrke. (Forsøg med rektangulære bjælker af Moody m.f. [54.2]).

Fig. 2.4 antyder, at  $\tau_{cr}$  for de stærkeste betontyper kun er svagt afhængig af betonkvaliteten. Nyere forsøg ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner til bestemmelse af betonens enaksede trækstyrke  $\sigma_{br}$  viser, at  $\sigma_{br}$  afbildet som funktion af  $\sigma_c$  har den samme tendens for de stærke betonkvaliteter. Sammen med tilsvarende forsøg af bl.a. Taylor[60.8], Krefeld og Thurstone[62.8], van den Berg [62.16], og Kani [66.5], [68.4], kan det konkluderes, at  $\tau_{cr}$  primært afhænger af betonens trækstyrke.

At betonstyrken ikke alene kan beskrive forholdet ved diagonalrevnelasten fremgår af fig. 2.5, hvor ACI-ASCE [62.1] har afbildet  $\tau_{cr}$  for et stort antal forsøg som funktion af  $\sigma_c$ .

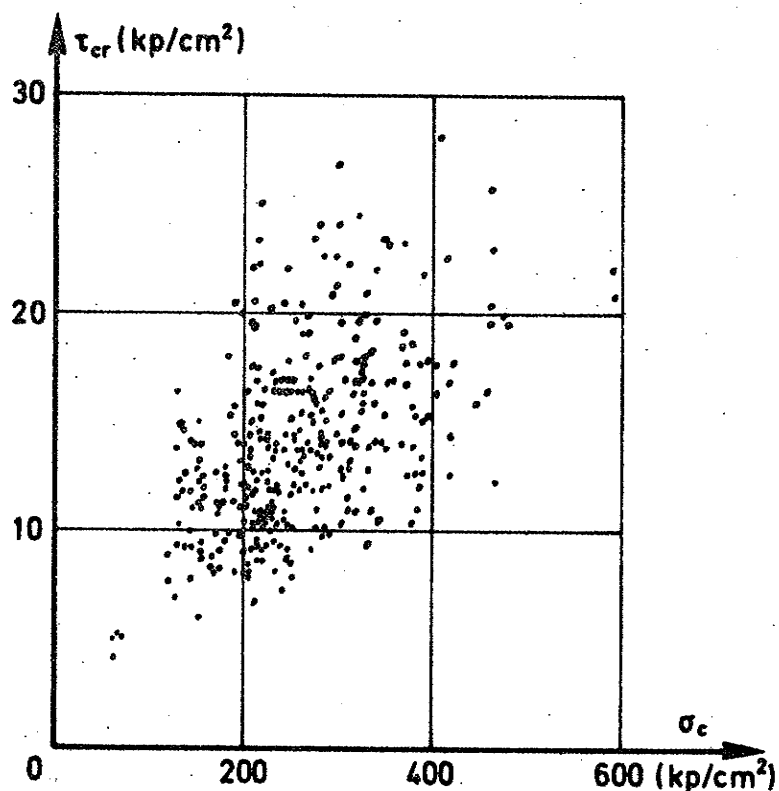


Fig. 2.5 Diagonalrevnelastens afhængighed af betonens cylinderstyrke. (Efter ACI-ASCE [62.1]).

### 2.2.2 Længdearmering

I det følgende behandles som nævnt i indledningen kun længdearmering bestående af forkammede armeringsstænger. I afsnit 3.2 er beskrevet, hvorledes diagonalrevnedannelsen i visse specielle tilfælde kan undgås ved anvendelse af længdearmering, der består af helt glatte rundjern.

Forsøg af bl.a. Moody m.f. [54.2], Leonhardt og Walther [62.9], Taylor [60.8], Kani [66.5] og Rajagopalan og Ferguson [68.8] viser, at diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  vokser svagt, når længdearmeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$  øges. På fig. 2.6 er vist resultaterne fra sidstenævnte forfatteres forsøg, idet  $\tau_{cr}$  er afbildet som funktion af  $\bar{w}_{ao}$ .

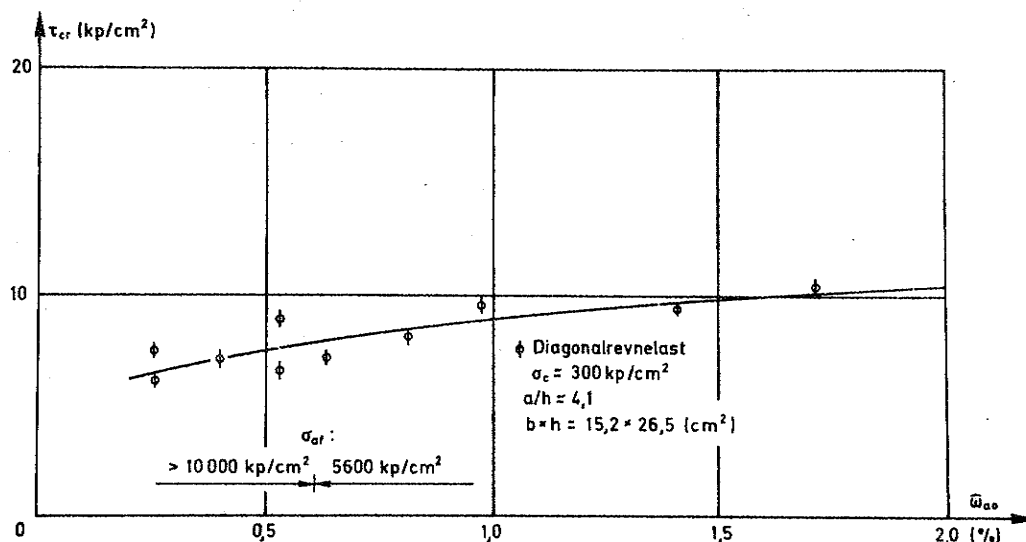


Fig. 2.6 Diagonalrevnelastens afhængighed af armeringsforholdet. (Forsøg med rektangulære bjælker af Rajagopalan og Ferguson [68.8]).

De to førstnævnte forskergrupper forsøg viser imidlertid også, at det er tvivlsomt, om  $\tau_{cr}$  kan forventes at afhænge af  $\rho_{ast}$  på en entydig måde. Af forsøgene fremgår det således, at  $\tau_{cr}$  bliver større, når samme armeringsareal fordeles på mange små stænger i stedet for på få store. Årsagen hertil er, at forskydningsspændingen (2.11) mellem armering og beton fordeles bedre i det førstnævnte tilfælde, idet adhæsiionsforholdene i højere grad afhænger af armeringsstængernes omkreds end af deres areal. Ved en undersøgelse af  $\rho_{ast}$ 's indflydelse på  $\tau_{cr}$  er det derfor ikke ligegyldigt, om en ændring af  $\rho_{ast}$  foretages ved at variere stængernes antal med fastholdt stangdiameter eller ved at holde antallet af stænger konstant og ændre deres areal. Adhæsionen mellem beton og armering vil i det førstnævnte tilfælde variere proportionalt med  $\rho_{ast}$ , mens den i det sidste tilfælde vil ændres proportionalt med  $\sqrt{\rho_{ast}}$ .

Moodys forsøg antyder, at der findes en øvre grænse for antallet af armeringsstænger, hvilket formodentlig skyldes, at der ikke opnås en tilstrækkelig god betonudstøbning mellem armeringsstængerne.

Længdearmeringens flydespænding  $\sigma_{af}$  har ikke direkte nogen indflydelse på størrelsen af  $\tau_{cr}$ . Således viser forsøg af Mathey og Watstein [63.7], at spændingen i armeringen i forskydningsfaget altid er i det elastiske område ved diagonalrevnedannelsen. Indirekte har  $\sigma_{af}$  imidlertid betydning gennem  $\bar{w}_{ao}$ . Sammenlignes to bjælker, hvor kun  $\bar{w}_{ao}$  og  $\sigma_{af}$  er forskellige, idet produktet  $\bar{w}_{ao}$  og  $\sigma_{af}$  er ens, vil den bjælke, der har højest  $\sigma_{af}$  og dermed mindst  $\bar{w}_{ao}$ , som konklusion af ovenstående have den mindste diagonalrevnelast. Problemer i tilknytning til dannelsen af diagonalrevner vil derfor blive mere dominerende, når der anvendes armering med høj flydespænding.

### 2.2.3 $\frac{M}{Th}$ -forhold

$\frac{M}{Th}$  -forholdets indflydelse på diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  er undersøgt af en lang række forskere, således Morrow og Viest [57.1], Leonhardt og Walther [62.9], Kani [66.5], [67.7], [68.4] og Swamy [69.12]. De fleste af disse forsøg omhandler bjælker, hvor belastningen består af to symmetriske enkeltkræfter som vist på fig. 2.2. Afstanden  $a$  mellem reaktion og belastning betegnes forskydningsspændvidden. Når det forudsættes, at diagonalrevnen dannes i afstanden  $h$  fra belastningen, kan  $\frac{M}{Th}$  også udtrykkes ved  $\frac{a}{h}$

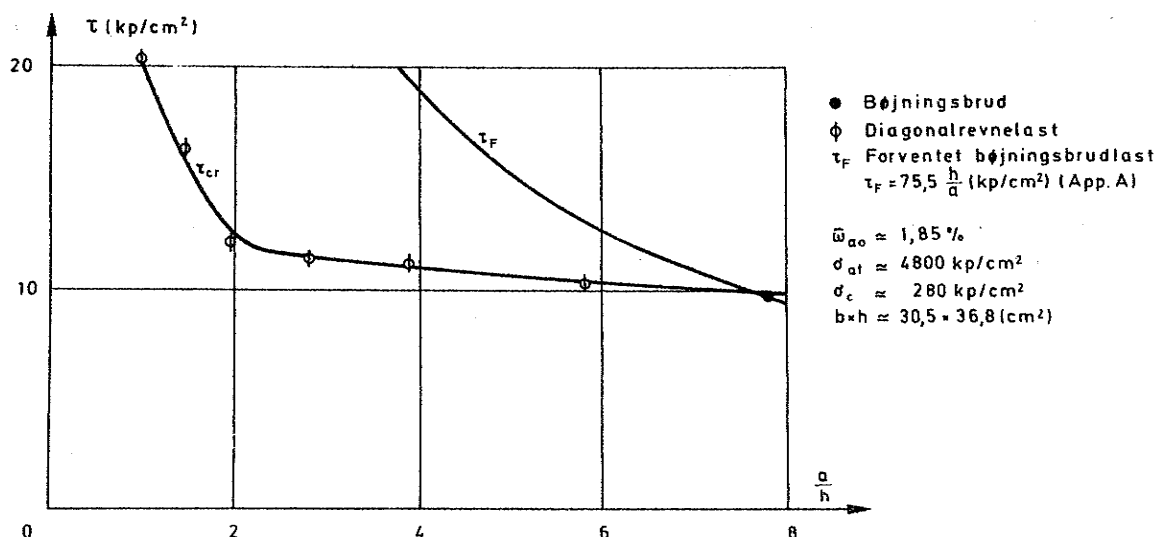


Fig. 2.7 Diagonalrevnelastens afhængighed af den relative forskydningsspændvidde. (Forsøg med rektangulære bjælker af Morrow og Viest [57.1]).

$$\frac{M}{T_h} = \frac{T(a-h)}{T_h} = \frac{a}{h} - 1 \quad (2.20)$$

$\frac{a}{h}$  betegnes ofte som den relative forskydningsspændvidde.

På fig. 2.7 er  $\tau_{cr}$  fra Morrow og Viests forsøg afbildet som funktion  $\frac{a}{h}$ . Det fremgår heraf, at når  $\frac{a}{h} > 1.5$ , stiger  $\tau_{cr}$  svagt for aftagende  $\frac{a}{h}$ . Dette er i overensstemmelse med (2.19). For mindre værdier af  $\frac{a}{h}$  stiger  $\tau_{cr}$  derimod betydelig mere, hvilket kan forklares ved, at diagonalrevnen i dette tilfælde dannes nær reaktionen. I denne del af bjælken findes væsentlige tryknormalspændinger ( $\sigma_y$  i (2.3)), der formindsker hovedtrækspændingerne, og som ikke er medtaget ved udledelsen af (2.19). Forholdene ved dannelse af diagonalrevner for sådanne ekstremt lave værdier af  $\frac{a}{h}$  vil ikke blive yderligere behandlet i denne rapport.

Forsøg med jævnt fordelt belastning er udført bl.a. af Diaz de Cossio og Siess [60.3], Krefeld og Thurstone [62.8], Leonhardt og Walther [62.9] og Rüschi m.f. [62.13]. Det fremgår heraf, at diagonalrevnedannelsen ved denne belastningsform forekommer nær understøtningen. Beregnes  $\frac{M}{T_h}$  - forholdet i afstanden  $\beta h$  fra understøtningen, findes

$$\frac{M}{T_h} = \beta \left( 1 + \frac{\beta \frac{h}{l}}{1 - 2\beta \frac{h}{l}} \right) \quad (2.21)$$

hvor  $l$  er bjælkens spændvidde, og  $\beta$  jfr. ovenstående vil være begrænset af uligheden  $1 < \beta < 2$ . Det fremgår af (2.21), at  $\frac{M}{T_h}$  -forholdet er en funktion af  $\frac{l}{h}$ , når  $\beta$  forudsættes konstant, og at  $\frac{M}{T_h}$  ikke vil variere væsentligt for  $\frac{l}{h} > 10$ . For  $\frac{l}{h} > 10$  kan diagonalrevnelasten iflg. (2.19) således kun forventes at afhænge svagt af  $\frac{l}{h}$ , hvilket også fremgår af ovennævnte forsøg.

Sammenlignes diagonalrevnelastens størrelse med tilsvarende bjælker belastet med enkeltkræfter, hvor  $\frac{a}{h} > 3$ , findes at  $\tau_{cr}$  er 5-15% højere, når belastningen er jævnt fordelt. Dette forhold skyldes, at diagonalrevnen ved denne belastningstype som ovenfor nævnt dannes nær reaktionen, hvor

tryknormalspændingerne ( $\sigma_y$  i (2.3)) vil bevirke, at hovedtrækspændingen bliver mindre.

Da det, der normalt benævnes en jævnt fordelt belastning, i praksis ofte består af en række mere eller mindre tætliggende enkeltkræfter, må det forventes at den gunstige virkning i forhold til belastning med to enkeltkræfter reduceres noget. Krefeld og Thurstones forsøg bekræfter dette.

#### 2.2.4 Bjælkehøjde, bjælkebredde

Forskydningsforsøg med rektangulære bjælker viser, at bjælker med en nyttehøjde, der er mindre end ca. 30 cm, har en højere diagonalrevnelast end tilsvarende bjælker med større højde. På fig. 2.8 er afbildet  $\tau_{cr}$  som funktion af nyttehøjden  $h$  for forsøg af Forsell [54.1], Leonhardt og Walther [62.9] og af Kani [67.7]. For Kanis forsøg er der på fig. 2.8 kun medtaget resultaterne for  $\frac{a}{h} = 3$ , idet forsøgene med andre  $\frac{a}{h}$ -værdier gav en tilsvarende afhængighed af nyttehøjden. Fig. 2.8 viser, at der sker en relativt stor stigning af  $\tau_{cr}$  for  $h$  mindre end 30-40 cm, således at resultater fra forsøg med nyttehøjde mindre end ca. 30 cm ikke direkte kan overføres til større bjælker.

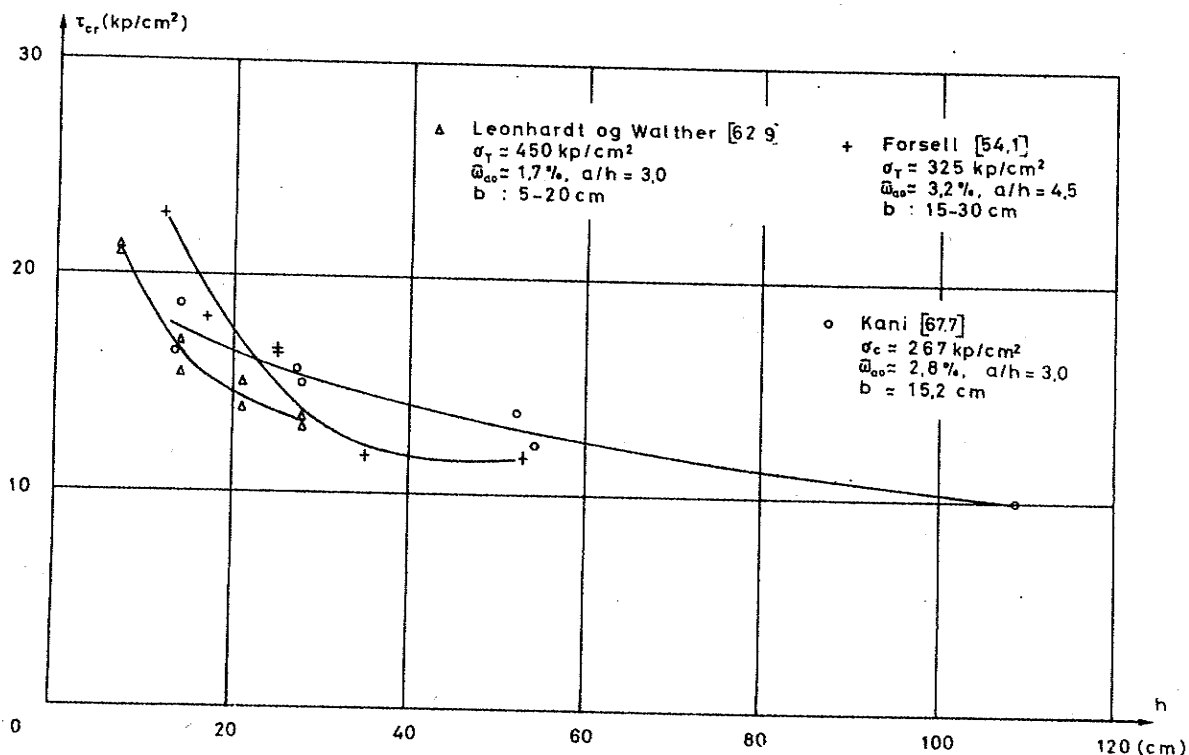


Fig. 2.8 Diagonalrevnens afhængighed af nyttehøjden.  
(Forsøg med rektangulære bjælker).

Årsagen til, at de relativt små bjælker har større styrke, må nok søges i, at adhæsionen mellem beton og længdearmering ikke bliver proportioneret ned i takt med bjælkens øvrige dimensioner. En tilfredsstillende forklaring på forholdene savnes imidlertid.

Leonhardt og Walther [62.9], Kani [67.7] og Sundara m.f. [68.15] har udført tilsvarende forsøg, hvor det er bjælkebredden, der er varieret. Det fremgår heraf, at bjælkebredden ingen indflydelse har på  $\tau_{cr}$ .

Ovennævnte erfaring har den praktiske betydning, at plader som følge af deres ringe højde normalt ikke behøver nogen forskydningsarmering.

#### 2.2.5 Tværsnitsform

Sammenlignes T-bjælker med tilsvarende rektangulære bjælker, idet bl.a. bjælkekroppens bredde  $b_o$  og længdearmeringsarealet  $A_a$  er ens, må det forventes, at T-bjælkerne har en lidt højere diagonalrevnelast  $\tau_{cr}$ . Dette skyldes, at momentarmen  $z$  ved denne bjælketype i praksis er ca. 10-15% større end ved tilsvarende rektangulære bjælker.

Forholdene er belyst af bl.a. Kani [68.4] ved tre forsøgsserier med rektangulære bjælker og T-bjælker, hvor  $\frac{a}{h}$ -forholdet er varieret. Kani angiver kun forskydningsbrudlasten  $\tau_u = \frac{T_u}{b_o h}$ , men tilsvarende forsøg viser, at diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  kan regnes lig  $\tau_u$ , når  $\frac{a}{h}$  er større end 2-3 for rektangulære bjælker, og  $\frac{a}{h}$  er større end 3-4 for T-bjælker. På fig. 2.9 er afbildet forskydningsbrudlasten  $\tau_u$  som funktion af  $\frac{a}{h}$ -forholdet. De to nederste kurver angiver resultaterne fra forsøg med rektangulære bjælker og T-bjælker med omtrent samme værdi af armeringsforholdet  $\bar{u}_{ao}$ . Det fremgår heraf, at diagonalrevnelasten for T-bjælkerne ligger netop de 10-15% over  $\tau_{cr}$  for de tilsvarende rektangulære bjælker, som forskellen i  $\frac{z}{h}$  betinger.

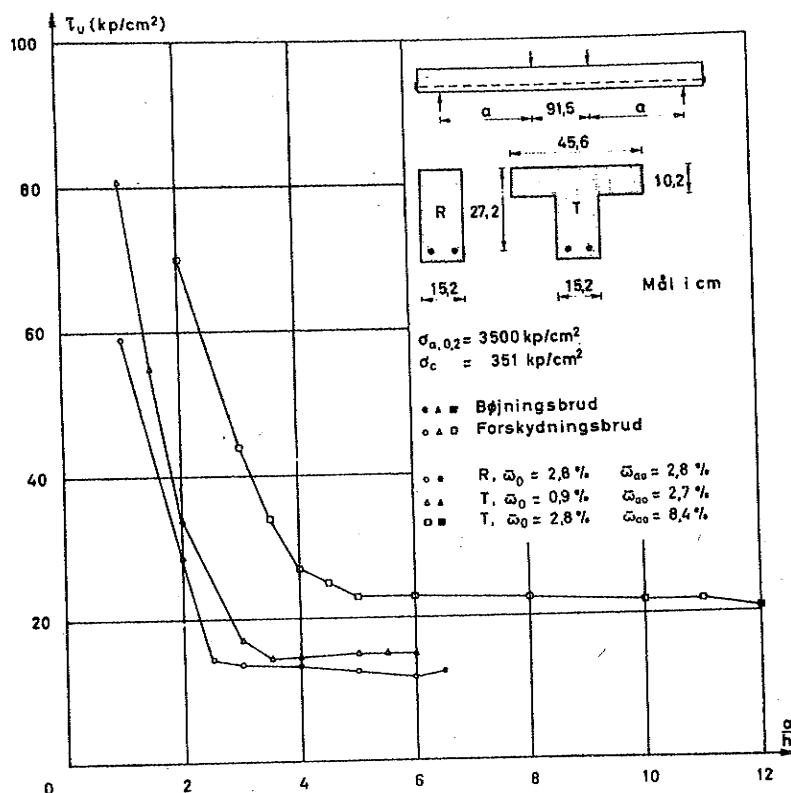


Fig. 2.9 Forskydningsbrudlastens afhængighed af tværsnitsformen. (Forsøg af Kani [68.4]).

Føjlagtigt sammenlignes imidlertid ofte T-bjælker med rektangulære bjælker med samme værdi af armeringsforholdet  $\bar{\omega}_0$

$$\bar{\omega}_0 = \frac{A_a}{bh} \quad (2.22)$$

hvor  $b$  er trykflangens bredde. Af den øverste kurve på fig. 2.9 fremgår det, at T-bjælkerne diagonalrevnelast i dette tilfælde vurderes for lavt.

For omvendte T-bjælker finder Petersson [64.8], at  $\tau_{or}$  bliver lidt større end  $\tau_{cr}$  for tilsvarende rektangulære bjælker med samme kroptykkelse. Dette er i overensstemmelse med, at denne bjælketype har større evne til at modvirke dannelsen af bøjningstrækrevner.

Diagonalrevnelastens størrelse for andre tværsnitsformer er ikke nøjere undersøgt ved forsøg.



### 2.2.6 Belastnings- og understøtningsform

Forholdene ved diagonalrevnedannelsen, når belastningen er forskellig fra, hvad der er behandlet i afsnit 2.2.3, er ikke nøjere undersøgt ved forsøg. De få eksisterende forsøg antyder, at betragtingerne i de foregående afsnit direkte kan overføres.

Tilsvarende forhold gælder ved andre understøtningsformer end simpelt understøtning. Ved kontinuerlige bjælker må opmærksomheden dog henledes på, at diskontinuitet i længdearmeringen kan medføre for tidlig diagonalrevnedannelse. Således viser forsøg af Baron [66.2], at tilstedeværelsen af en supplerende længdearmering, der afsluttes i forskydningsfaget, kan resultere i en nedsat diagonalrevnelast.

### 2.3 Beregningsformler

Vanskeligheden ved at opstille et korrekt udtryk til til beregning af diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  skyldes bl.a., at det næppe kan forventes, at  $\tau_{cr}$  kan udtrykkes eksplicit ved det store antal parametre, der har indflydelse på diagonalrevnedannelsen.

Den store spredning - 10 til 20% ved i øvrigt ens forsøg - medfører, at selv den bedste beregningsformel ikke må forventes at kunne tilpasse alle forsøgsresultater bedre end svarende til en variationskoefficient af beregnet ( $\tau_{cr}$ )/målt ( $\tau_{cr}$ ) på 10 til 15%.

Årsagen til denne forholdsvis store spredning må bl.a. søges i, at diagonalrevnedannelsen i betydelig grad afhænger af betonens inhomogenitet og svind - faktorer det ikke er muligt at tage i regning. Den ofte varierende definition af, hvornår en revne er en diagonalrevne, er nævnte i afsnit 2.1.

Spredningen og det store antal parametre, som  $\tau_{cr}$  afhænger af, forklarer, hvorfor det er muligt ud fra ret forskellige betragtningsmåder at opstille en række beregningsformler, der alle med rimelig nøjagtighed passer til forsøgsresultaterne.

I det følgende vil nogle enkelte forfatteres beregningsformler blive omtalt, idet disse er valgt som typiske for nogle almindelige betragtningsmåder. Disse formler er primært opstillet for simpelt understøttede bjælker belastet med en eller to symmetriske enkeltkræfter.

### 2.3.1 Viest (ACI-ASCE)

Viest m.f. (beskrevet i [62.1]) anvender som udgangspunkt (2.19) og (2.6) ved bestemmelse af diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$ , idet forholdet mellem momentarm og nyttehøjde regnes konstant lig  $\frac{7}{8}$ . Endvidere regnes betonens trækstyrke og elasticitetsmodul proportional med  $\sqrt{\sigma_c}$ , hvor  $\sigma_c$  er cylinderstyrken.  $\frac{M}{Th}$ -forholdet beregnes for punktbelastning for det normalsnit, der er vist på fig. 2.10a, mens  $\frac{M}{Th}$  ved jævnt fordelt belastning beregnes for et normalsnit i afstanden  $h$  fra understøtningen.

For at finde en simpel sammenhæng mellem de to parametergrupper  $\frac{\tau_{cr}}{\sqrt{\sigma_c}}$  og  $\frac{\bar{w}_{ao} Th}{\sqrt{\sigma_c} M}$  foretages en afbildning af resultaterne fra et stort antal forsøg, som det er vist på fig. 2.10b. Til bestemmelse af diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  indlægges to rette linier vist på figuren, hvorved

$$\tau_{cr} = 0,50 \sqrt{\sigma_c} + 176 \bar{w}_{ao} \frac{Th}{M} \leq 0,93 \sqrt{\sigma_c} \quad (2.23)$$

hvor  $\sigma_c$  og  $\tau_{cr}$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ .\*

For Viests formel (2.23) angiver Regan [68.10] ved en undersøgelse af 275 simpelt understøttede punktbelastede, rektangulære bjælker, hvor  $\frac{a}{h} > 1,5$ , at middeltallet af beregnet ( $\tau_{cr}$ )/målt ( $\tau_{cr}$ ) er 0,85 med en variationskoefficient på 16%.

---

\* Denne formel og en række af de øvrige formler er oprindeligt opstillet i et andet enhedssystem end det af forfatteren anvendte. Herved kan de indgående talkonstanter i visse tilfælde antyde en større nøjagtighed end oprindelig tilstræbt.

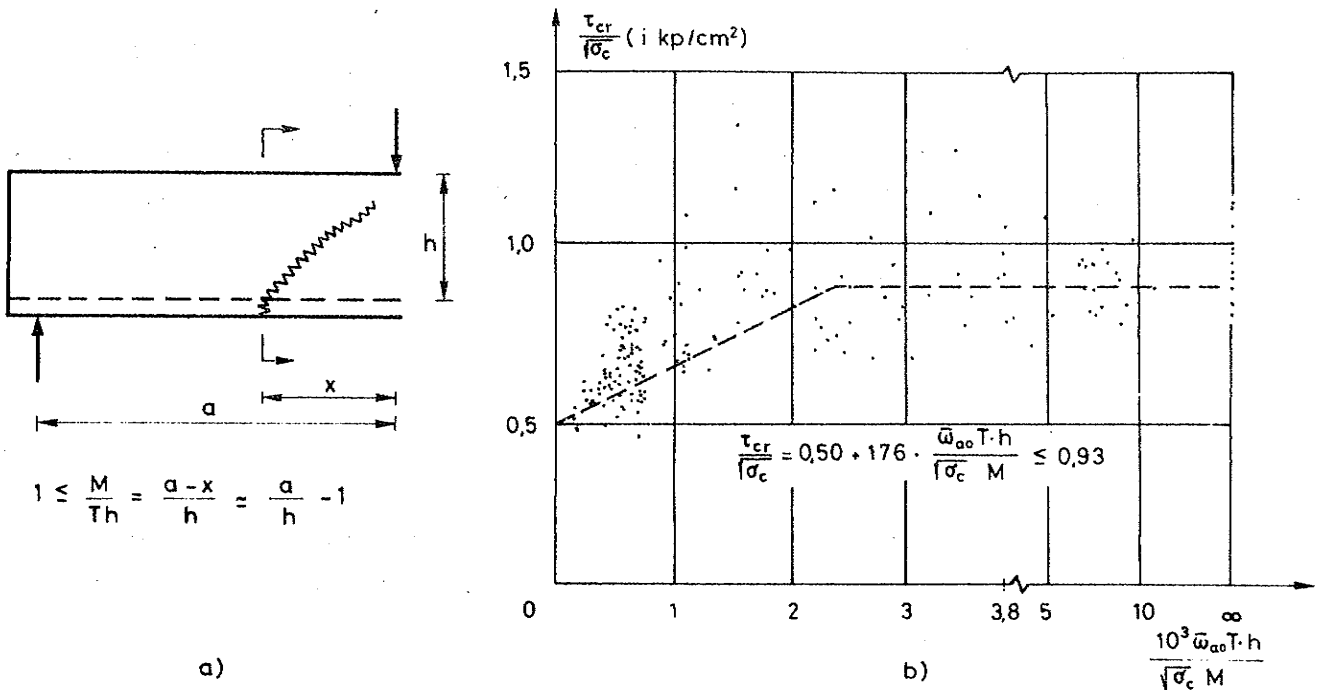


Fig. 2.10 Bestemmelse af diagonalrevnelasten efter Vies (ACI-ASCE).

### 2.3.2 Kani

Kani [64.5], [67.7] og [68.4] antager, at den rektangulære betonbjælke består af en række "betontænder", der er adskilt af bøjningstrækrevner, og som regnes indspændt i betontrykzonen, jfr. fig. 2.11. Denne betragtningsmåde betegnes på engelsk som "tooth method" og er anvendt på forskellig vis af en lang række forfattere, bl.a. Moe [62.11] og [62.12], Lorentsen [64.7], MacGregor og Walthers [67.10] og til dels af Regan, se afsnit 2.3.4.

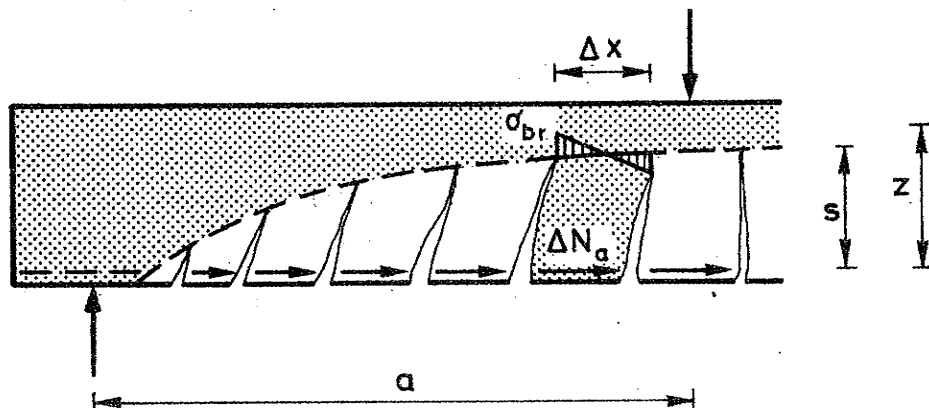


Fig. 2.11 Diagonalrevnedannelse efter Kani. (tooth method).

Kani regner med, at diagonalrevnedannelsen sker, når den største trækspænding i indspændingen bliver lig betonens trækstyrke  $\sigma_{br}$ , hvor  $\sigma_{br}$  regnes proportional med  $\sqrt{\sigma_c}$ .

Størrelsen af den forskydende kraft  $\Delta N_a$  mellem armering og beton bestemmes ved anvendelse af den sædvanlige bjælketeori på den udkragede "tand", idet den største trækspænding sættes lig  $\sigma_{br}$ .

$$\sigma_{br} = \frac{\Delta N_a s}{\frac{1}{6} \Delta x^2 b} \quad (2.24)$$

hvor  $\Delta x$  er middelfaststanden mellem to bøjningstrækrevner,  $b$  er bjælkens bredde, og  $s$  er bøjningstrækrevnens længde, jfr. fig. 2.11.

Endvidere antages det, at  $\Delta N_a$  kan udtrykkes ved armeringens trækraft  $N_a$  i momentfaget ved

$$\frac{\Delta N_a}{\Delta x} = \frac{N_a}{a} \quad (2.25)$$

hvor  $a$  er forskydningsspændvidden. Herefter kan momentet  $M_{cr}$  i bøjningsfaget ved diagonalrevnedannelsen findes af (2.24) og (2.25), idet  $M_{cr} = N_a z$ , hvor  $z$  er momentarmen

$$M_{cr} = \frac{1}{6} \sigma_{br} \frac{\Delta x}{s} a z b \quad (2.26)$$

Ved en række antagelser og udregninger, som det vil føre for vidt at anføre her - der henvises til Kani [67.7] - når forfatteren frem til følgende udtryk for diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$

$$\tau_{cr} = 0,064 (\bar{w}_0)^{\frac{1}{2}} \sigma_{af} (h)^{-\frac{1}{4}} \frac{z}{h} \quad (2.27)$$

hvor nyttehøjden  $h$  indsættes i cm, og  $\bar{w}_0$  er armeringsforholdet. Talfaktoren 0,064 samt afhængigheden af  $h^{-\frac{1}{4}}$  er bestemt ud fra forsøg med simpelt understøttede, rektangulære bjælker belastet af enkeltkræfter. Kani angiver, at (2.27) bestemmer diagonalrevnelasten inden for  $\pm 15\%$ .

Det bemærkes, at  $\sigma_{af}$  indgår i udtrykket for  $\tau_{cr}$ , hvilket ikke synes rimeligt, når der som tidligere nævnt ikke opstår flydning i hovedarmeringen ved diagonalrevnedannelsen. Kennedy[67.8] har imidlertid vist, at betonbjælker i praksis og ved forsøg ofte dimensioneres, således at der fremkommer en korrelation mellem  $\sigma_{af}$  og  $\sigma_c$ , hvorved betonkvaliteten indirekte kommer til udtryk gennem  $\sigma_{af}$ . At indføre diagonalrevnelastens afhængighed af betonens styrke på denne tvivlsomme måde medfører, som det vil fremgå af afsnit 2.3.5, at (2.27) giver for stor værdi af  $\tau_{cr}$ , når  $\sigma_{af}$  er større end ca. 4000 kp/cm<sup>2</sup>. Årsagen hertil er bl.a., at Kanis formel er opstillet på grundlag af for få forsøgsresultater.

### 2.3.3 Kennedy, Zsutty

Kennedy [67.8] og Zsutty [68.14] bestemmer  $\tau_{cr}$  ved en lineær regressionsanalyse. Ved denne helt empiriske metode bestemmes diagonalregnelasten  $\tau_{cr}$  ved et udtryk af formen

$$\tau_{cr} = k a^{\alpha} b^{\beta} \dots d^{\delta} \quad (2.28)$$

hvor a, b, .... d er en række parametre på dimensionsløs form og k en konstant (enhed som  $\tau_{cr}$ ). Potenserne  $\alpha$ ,  $\beta$ , ....  $\delta$  bestemmes ved at minimalisere spredningen. Ved valg af parametre er det vigtigt, at disse er indbyrdes uafhængige, hvilket kan medføre visse vanskeligheder, idet f.eks. valg af større  $\sigma_c$  ofte vil resultere i valg af større  $\bar{w}_0 \sigma_{af}$ . Metoden kræver normalt anvendelse af EDB og har herved den fordel, at det er muligt at undersøge indflydelsen fra et stort antal parametre. Kennedy undersøger ad denne vej afhængigheden af hovedarmeringens flydespænding og tilstedeværelsen af bøjler. Kennedys konklusion er, at disse to parametre ingen væsentlig indflydelse har på  $\tau_{cr}$ .

Kennedy finder på grundlag af 270 forsøg med rektangulære bjælker følgende udtryk

$$\tau_{cr} = 4,32 \frac{\sigma_c^{0,426}}{h^{0,282}} \left[ 1 + \frac{M}{25 \bar{w}_0 Th} \right]^{-0,244} \left[ 1 + \left( \frac{\bar{w}_0'}{2 \bar{w}_0} \right) \right]^{-0,652} \quad (2.29)$$

hvor  $\bar{w}_0$  er armeringsforholdet for trykarmering,  $h$  skal ind-sættes i cm og  $\frac{M}{Th}$  beregnes som beskrevet i 2.3.1, idet  $\frac{a}{h} > 1,5$ . Standardafvigelsen for (2.29) er ca. 10%.

Zsutty anvender et noget simplere udtryk og finder på grundlag af 151 forsøg med rektangulære bjælker, hvor  $\frac{a}{h} > 2,5$

$$\tau_{cr} = 10,1 (\sigma_c \bar{w}_0 \frac{h}{a})^{\frac{1}{3}} \quad (2.30)$$

hvor  $\sigma_c$  og  $\tau_{cr}$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ . Standardafvigelsen er 9%.

Ved regressionsanalysen blev potenserne i (2.30) naturligvis ikke nøjagtig  $\frac{1}{3}$ , men Zsutty angiver, at (2.30) for de undersøgte bjælker giver en standardafvigelse, der afviger mindre end 1% fra det oprindelige udtryk.

#### 2.3.4 Regan

Regan [68.10] antager ligesom Kani, at bjælken ved dannelsen af bøjnings-forskydningsrevner kan opfattes som bestående af en række "betontænder". Betonen over bøjnings-trækrevnerne skal optage forskydningskraften, som antydnet på fig. 2.12. For rektangulære bjælker bestemmer Regan herefter diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  som

$$\tau_{cr} = q_{cr} \cdot \frac{x}{h} \quad (2.31)$$

hvor  $q_{cr}$  angiver en gennemsnitlig kritisk forskydningssspænding.  $q_{cr}$  regnes proportional med betonens trækstyrke  $\sigma_{br}$ .

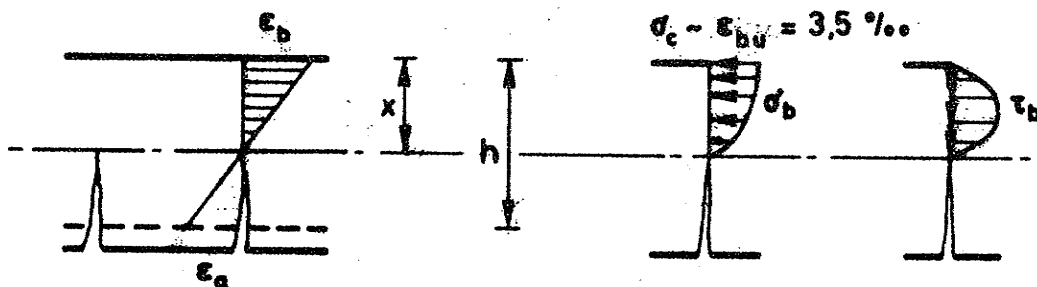


Fig. 2.12 Diagonalrevnedannelse efter Regan.

der igen udtrykkes ved cylinderstyrken  $\sigma_c$ , idet  $\sigma_{br}$  regnes proportional med  $(\sigma_c)^{\frac{2}{3}}$  (CEB [69.16]). Idet  $k$  er en proportionalitetsfaktor fås

$$q_{cr} = k (\sigma_c)^{\frac{2}{3}} \quad (2.32)$$

$\frac{x}{h}$  i (2.31) beregnes ved den normale metode til bestemmelse af nulliniens beliggenhed, idet betonens trykarbejdslinie dog her regnes parabolisk og betonens kantttøjning regnes lig  $\epsilon_{bu} = 3,5$  o/oo. Herved fås

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{g^2 + 4g} - g \right) \quad (2.33)$$

$$g = \frac{3 E_a \bar{w}_o \epsilon_{bu}}{2 \sigma_c} \quad (2.34)$$

hvor  $E_a$  er armeringens elasticitetsmodul, og  $\bar{w}_o$  er armeringsforholdet.

Det endelige udtryk for diagonalrevnelasten fås af (2.31) og (2.32), idet størrelsen af proportionalitetsfaktoren  $k$  er bestemt ud fra forsøg

$$\tau_{cr} = 0,412 \frac{x}{h} (\sigma_c)^{\frac{2}{3}} \quad (2.35)$$

hvor  $\frac{x}{h}$  som nævnt bestemmes af (2.33) og (2.34).  $\sigma_c$  og  $\tau_{cr}$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ .

For 275 simpelt understøttede, punktbelastede, rektangulære bjælker angiver Regan, at middelværdien af beregnet  $(\tau_{cr})$ /målt  $(\tau_{cr})$  for (2.35) er 0,88 med en variationskoefficient på 14%.

Ovennævnte metode har den principielle fejl, at der regnes med knusning af betonen i trykzonen ved dannelsen af diagonalrevnen, hvilket normalt ikke konstateres ved forsøg. Når (2.35) alligevel giver god overensstemmelse med forsøg, er årsagen, at den empiriske konstant i (2.32) kompenserer for dette forhold.

Ifølge Regan kan ovennævnte formel simplificeres, idet (2.33) med god tilnærmelse kan skrives som et potensudtryk i

$\bar{w}_0$  og  $\sigma_c$ . Herved fås

$$\tau_{cr} = 5,95 (\sigma_c \bar{w}_0)^{\frac{1}{3}} \quad (2.36)$$

Samtidig anføres, at dette udtryk også gælder for T-bjælker, når  $\bar{w}_0$  erstattes af armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ , og når  $\tau_{cr}$  begrænses af udtrykket

$$\tau_{cr} \leq 1,83 (\sigma_c)^{\frac{1}{3}} \quad (2.37)$$

(2.37) angiver diagonalrevnelasten svarende til dannelsen af forskydningstrækrevner.

For de samme 275 bjælker som ovenfor nævnt angiver Regan, at middelværdien beregnet  $(\tau_{cr})/\text{målt } (\tau_{cr})$  for (2.36) er 0,94 med en variationskoefficient på 14%. For 38 T-bjælker er middelværdien af beregnet  $(\tau_{cr})/\text{målt } (\tau_{cr})$  for (2.36) og (2.37) 0,88 og variationskoefficienten 18%.

### 2.3.5 Sammenligning af beregningsformler

På fig. 2.13 er der foretaget en afbildning af diagonalrevnelasten for rektangulære bjælker bestemt af de formler, der er omtalt i de foregående afsnit, som funktion af de tre væsentligste parametre:  $\frac{a}{h}$ ,  $\bar{w}_0 = \bar{w}_{ao}$  og  $\sigma_c$ . Parametrene er valgt således, at det er muligt at sammenligne med nogle enkelte forsøgsresultater.

Sammenligningen er foretaget for følgende formler

- 1) Kani, ligning (2.27)
- 2) Viest (ACI-ASCE), ligning (2.23)
- 3) Zsutty, ligning (2.30)
- 4) Kennedy, ligning (2.29)
- 5) Regan, ligning (2.36).

På fig. 2.13 er endvidere indtegnet den forventede bøjningsbrudlast  $\tau_F$  beregnet efter appendix A.

Generelt gælder, at Viest og Regans formler i middel giver  $\tau_{cr}$ -værdier ca. 10% under Zsutty og Kennedys formler.



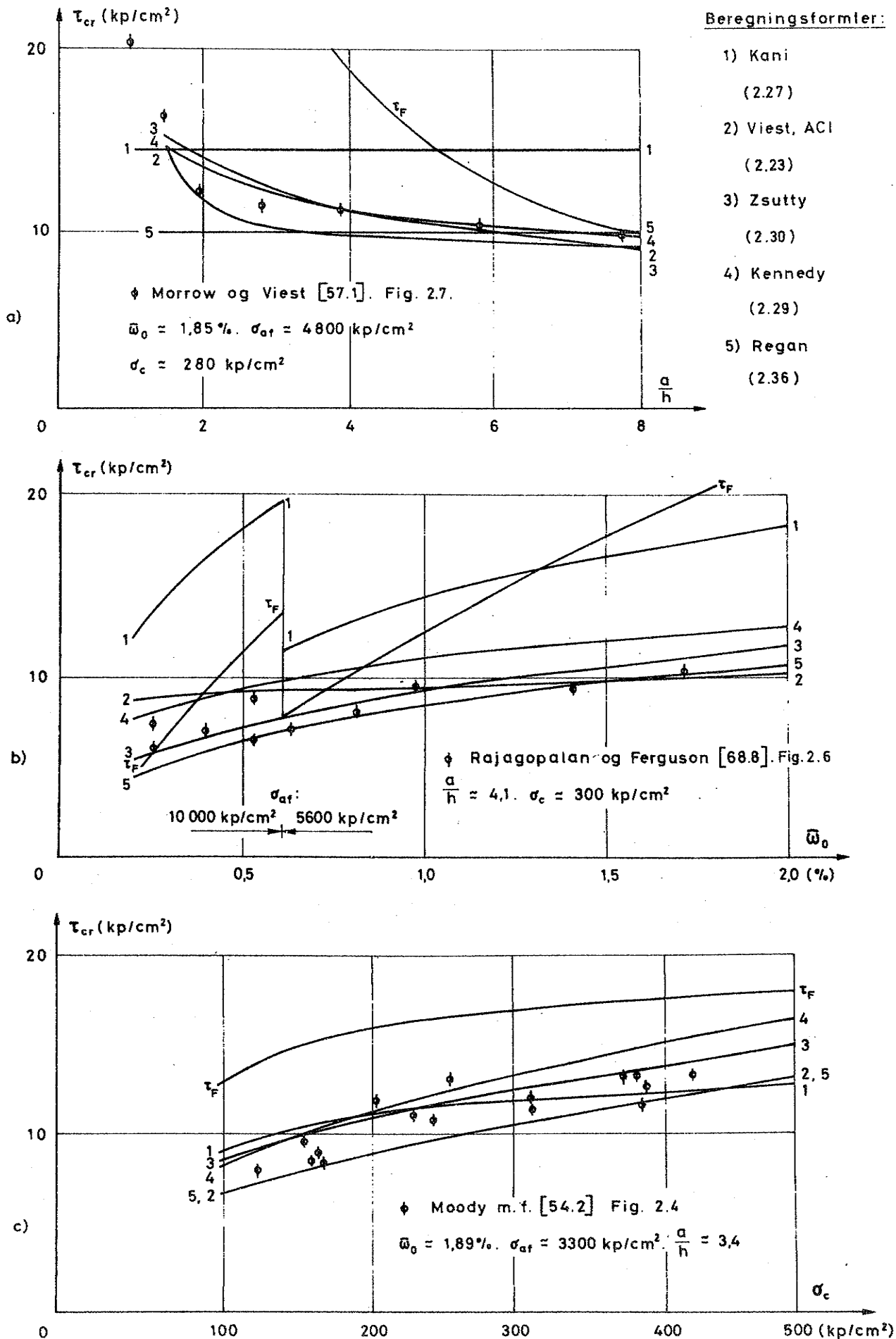


Fig. 2.13 Sammenligning af beregningsformler for diagonalrevnelasten.

$\frac{a}{h}$  -forhold. Fig. 2.13a

Forsøgsresultaterne er fra Morrow og Viest [57.1] og er også afbildet på fig. 2.7. Samtlige formler, med undtagelse af Kanis, synes at give tilfredsstillende overensstemmelse med forsøgsresultaterne. De væsentligste afvigelser findes for  $\frac{a}{h} < 3$ , hvilket svarer til, at usikkerheden ved diagonalrevnebestemmelsen er størst her. Regan tager ikke hensyn til stigningen af  $\tau_{cr}$  for aftagende  $\frac{a}{h}$ , hvad der er på den sikre side. Det bemærkes, at Regans tilnærmede formel (2.35) er identisk med Zsutts formel for  $\frac{a}{h} = 4,9$  og giver værdier mindre end denne for  $\frac{a}{h} < 4,9$ .

Kanis formel giver for høje værdier, hvilket skyldes diagonalrevnelastens afhængighed af armeringens flydespænding i Kanis formel.

$\bar{w}_0$ . Fig. 2.13b

Forsøgsresultaterne er fra Rajagopalan og Ferguson [68.8] og er også afbildet på fig. 2.6. Ved disse forsøg undersøges specielt forholdene ved lav  $\bar{w}_0$  og høj  $\sigma_{af}$ .  $\tau_F$ -kurven og Kanis formel er beregnet for de på figuren anførte værdier af  $\sigma_{af}$ . Dette svarer til minimumsværdier, idet  $\sigma_{af}$  varierede en del fra bjælke til bjælke. Forsøgene underbygger disse forfatteres påstand om, at Viests formel giver for høje værdier for  $\bar{w}_0 < 1\%$ , hvilket også er konstateret ved andre forsøg. Det tilsvarende synes at gælde for Kennedys formel i hele det undersøgte interval for  $\bar{w}_0$ . Da  $\sigma_{af}$  er relativt høj, findes, at Kanis formel ikke er i overensstemmelse med forsøgene (analogt med fig. 2.13a). De øvrige formler giver tilfredsstillende tilpasning til forsøgsresultaterne.

$\sigma_c$ . Fig. 2.13c

Forsøgsresultaterne er fra Moddy m.f. [54.2] og er også afbildet på fig. 2.4. Alle formler synes at tilpasse forsøgsresultaterne lige godt, dog således at Kennedys formel muligvis giver for voldsom stigning af  $\tau_{cr}$  for  $\sigma_c > 300 \text{ kp/cm}^2$ .

Forholdene ved diagonalrevnedannelsen er imidlertid

endnu ret uafklarede for  $\sigma_c > 400 \text{ kp/cm}^2$ .

### Øvrige parametre

Foruden ovennævnte tre parametre tager Kani og Kennedy hensyn til nyttehøjdens indvirken. Variationen er i begge tilfælde af formen  $\tau_{cr} \sim (h)^{\frac{1}{4}}$ , svarende til forsøgsresultaterne vist på fig. 2.8. De øvrige formler giver  $\tau_{cr}$  på den sikre side for  $h < 60 \text{ cm}$ , mens der mangler tilstrækkeligt forsøgsmateriale til en vurdering af forholdene for større værdier af  $h$ .

For T-bjælker viser forsøg og bl.a. Regans undersøgelse [68.10], at formlerne kan anvendes, når  $\bar{u}_0$  erstattes af  $\bar{u}_{ao}$ . Der må dog indføres en øvre grænse for  $\tau_{cr}$  svarende til dannelsen af forskydningstrækrevner.

Regan anfører

$$\tau_{cr} \leq 1,83(\sigma_c)^{\frac{1}{3}} \quad (2.37)$$

mens Viest anfører

$$\tau_{cr} \leq 0,93(\sigma_c)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

Bl.a. Kanis forsøg [68.4], hvor nogle resultater er afbildet på fig. 2.9, synes at vise, at (2.37) er for konservativ, mens (2.23) passer bedre med forsøgsresultaterne.

For bjælker med jævnt fordelt belastning viser forsøg, at det er på den sikre side at regne disse som punktbelastede bjælker, når  $\frac{M}{Th}$  beregnes i afstanden  $h$  fra understøtningen.

### Konklusion

Af det foregående fremgår det, at Kanis formel må forkastes, da den ikke stemmer med forsøgsresultater, når  $\sigma_{af}$  er større end ca.  $4000 \text{ kp/cm}^2$ .

Af de to formler bestemt ved regressionsanalyse, må Zsuttys foretrækkes, da denne er den mest enkle, og da Kennedys formel bl.a. for de på fig. 2.13 viste forsøg giver for store værdier af  $\tau_{cr}$ .

Regans formel giver i store træk samme resultat som Zsuttys, men tilgodeser ikke stigningen af  $\tau_{cr}$  for aftagende  $\frac{a}{h}$ -værdier. Da den relative forskydningsspændviddes betydning er af samme størrelsesorden som betydningen af  $\sigma_c$  og  $\bar{w}_{ao}$ , må Zsuttys formel foretrækkes fremfor Regans.

Viests formel er på den usikre side for  $\bar{w}_{ao} < 1\%$ , hvilket muligvis skyldes anvendelse af det tilnærmede udtryk (2.23) i stedet for det oprindelige (2.19), men under alle øvrige forhold giver formelen værdier på den sikre side.

Zsuttys formel til beregning af  $\tau_{cr}$  ved dannelsen af bøjnings-forskydningsrevner synes at give bedst overensstemmelse med forsøg. Formlen kan ved sammenligning med Regans formler og anvendelsen af Regans undersøgelse [68.10] udvikles til at gælde andre bjælketyper end rektangulære (T-bjælker og I-bjælker) ved at tilføje en øvre grænse for  $\tau_{cr}$  (2.23), svarende til diagonalrevnelasten ved dannelsen af forskydningstrækrevner. Armeringsforholdet  $\bar{w}_0$  i (2.30) skal da erstattes af armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ , og  $\frac{a}{h}$  skal erstattes af  $\frac{M}{Th} + 1$  (2.20). Diagonalrevnelastens  $\tau_{cr}$  bestemmes herefter af

$$\tau_{cr} = 10,1 (\bar{w}_{ao} \sigma_c \frac{1}{\frac{M}{Th} + 1})^{\frac{1}{3}} \leq 0,93 (\sigma_c)^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

hvor  $\tau_{cr}$  og  $\sigma_c$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ , og  $\frac{M}{Th} > 1,5$ .\*

Da ovennævnte formel er empirisk, må det påpeges, at dens anvendelsesområde kun gælder bjælketyper, der allerede er afprøvet ved forsøg.

## 2.4 Resumé

Forholdene ved dannelsen af diagonalrevnen synes i store træk klarlagt. Revnedannelsen skyldes primært, at største hovedtrækspænding overskrider betonens trækstyrke. Herved kan der dannes to diagonalrevnetyper:

---

\* Se fodnote afsnit 2.3.1.

- 1) Bøjnings-forskydningsrevner, der dannes i forlængelse af allerede eksisterende bøjningstrækrevner. Diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  kan med tilstrækkelig god tilnærmelse udtrykkes ved de tre parametre: betonens cylinderstyrke  $\sigma_c$ , armeringsforholdet  $\rho_{ao}$  og forholdet mellem bøjningsmoment og forskydningskraft gange nyttehøjde, som det fremgår af første led i (2.38).
- 2) Forskydningstrækrevner, der dannes ved bjælkens tyngdepunktslinie. Den største hovedtrækspænding er direkte proportional med forskydningskraften. Revnelasten  $\tau_{cr}$  kan tilnærmet udtrykkes ved betonens cylinderstyrke  $\sigma_c$ , som det fremgår af sidste led i (2.38). Denne revnetype vil kun være aktuel ved meget slanke T- og I-tværsnit.

Diagonalrevnelasten kan ikke forventes bestemt med større nøjagtighed end 10-15%, hvilket bl.a. skyldes betonens inhomogenitet og svind. Dette er medvirkende til, dels at det er berettiget at udtrykke diagonalrevnelasten ved  $\tau_{cr}$  (2.6) og ikke den teoretisk korrekte størrelse  $\tau'_{cr}$  (2.5), og dels at anvende et forholdsvis simpelt udtryk (2.38) til beregning af  $\tau_{cr}$ .

Ved beregning af diagonalrevnelasten efter (2.38) er det forudsat, at langedearmeringen er udformet på en sådan måde, at uheldige spændingskoncentrationer er undgået. Afkortet eller opbøjet armering kan således medføre for tidlig diagonalrevnedannelse.

### 3. Brudlast for bjælker uden forskydningsarmering

#### 3.1 Kraftomlejring

Tilsvarende forholdene efter dannelsen af bøjningstrækrevnerne, hvor langedearmeringen erstatter betonen ved optagelse af trækspændingerne, vil der i forskydningsfaget foregå en omlejring af de indre kræfter efter diagonalrevnedannelsen. Revneforløbet og brudformen afhænger hovedsagelig af denne kraftomlejring. For rektangulære bjælker uden forskydningsarmering kan der regnes med de på fig. 3.1 viste snitkræfter, idet der i forskydningsfaget betragtes et snit fra bjælkens underside, langs diagonalrevnen og fra dennes øvre endepunkt vinkelret på bjælkeaksen videre til bjælkens overside.  $N_a$  betegner langedearmeringens trækraft og  $N_b$  resultanten af betontrykspændingerne i bjælkeaksens retning.  $T_a$  er hoveddarmeringens bidrag til forskydningsoptagelsen, og  $\tau_b$  er resultanten af de forskydende spændinger i betontrykzonen. Anvendes ligevægtsligningerne for den på fig. 3.1 vist bjælkedel afgrænset af den ovenfor omtalte diagonalrevne, findes

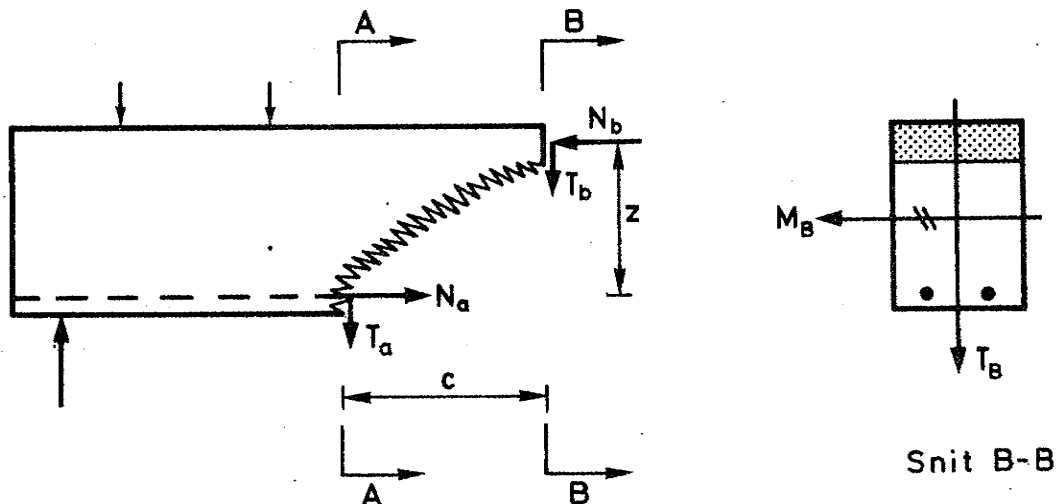


Fig. 3.1 Snitkraftomlejring i forskydningsfaget efter diagonalrevnedannelsen.

$$0 = N_a - N_b \quad (3.1)$$

$$T_B = T_a + T_b \quad (3.2)$$

$$M_A = N_b \cdot z - T_b \cdot c \quad (3.3a)$$

$$M_B = N_a \cdot z + T_a \cdot c \quad (3.3b)$$

hvor index A henholdsvis B angiver, at bøjningsmoment M og forskydningskraft T skal henføres til normalsnit A-A ved diagonalrevnens nedre endepunkt, henholdsvis normalsnit B-B ved diagonalrevnens øvre endepunkt.

Hovedarmeringens bidrag  $T_a$  betegnes normalt som dornvirkningen. Kraften  $T_a$  vil fra hovedarmeringen overføres som lodrette trækspændinger i betonen mellem hovedarmeringsstængerne og over disse. Når trækspændingerne overskrider betonens trækstyrke, vil diagonalrevnen løbe videre frem mod understøtningen i form af en vandret opspaltningsrevne, hvilket især for store  $\frac{a}{h}$ -værdier vil medføre betydelig åbning af revnen. Risikoen for en sådan opspaltning bliver mindre, når  $\frac{a}{h}$ -værdien aftager.

Betontrykzonens bidrag vil, som det fremgår af ovenstående, indirekte afhænge af dornvirkningen. Herudover vil betonens tryk- og trækstyrke og trykzonens geometriske udformning have indflydelse på  $T_b$ .

Hvorledes den samlede forskydningskraft fordeles på de to bidrag er endnu ikke klarlagt. Dette vil fremgå af følgende korte resumé af nogle enkelte forskeres undersøgelser.

Watstein og Mathey [58.1] finder, at den største dornvirkning er tilstede ved ca. 50% af brudlasten. Til bestemmelse af  $T_a$  anvendes ligevægtsligningerne, idet de øvrige størrelser søges bestemt ud fra omhyggelige tøjningsmålinger. Metoden er imidlertid behæftet med betydelig usikkerhed, bl.a. fordi der dannes differencer mellem ret store, næsten ens tal.

Acharya og Kemp [65.1] finder ud fra antagelser om spændingsfordelingen i betontrykzonen ved maximalmomentet

og et brudkriterium for beton, at dornvirkningen maximalt kan udgøre ca. 60% af den samlede forskydningskraft. Taylor [68.13] finder ved tilsvarende betragtninger, hvor tøjningerne i betontrykzonen måles ved anvendelse af strain gages, at  $T_a$  kan være op til 75% af  $T$ .

Krefeld og Thurstone [62.8], [66.6] og Baumann [68.2] bestemmer  $T_a$  direkte ved at udføre forsøg med bjælker, der indeholder præfabrikerede diagonalrevner. Denne forsøgsmetode er uheldig, da dornvirkningen er meget afhængig af den aktuelle revnedannelse. Krefeld og Thurstone finder i modsætning til Watstein og Mathey, at  $T_a$  ikke aftager ved voksende belastning.

### 3.2 Buevirkning

Foruden den i foregående afsnit omtalte omlejring af snitkræfterne efter diagonalrevnedannelsen er der mulighed for optagelse af forskydningspåvirkningen på en anden måde, hvorved diagonalrevnen vil dannes ved en større belastning eller helt kan undgås.

Af afsnit 2 fremgår det, at diagonalrevnerne dannes som følge af, at der overføres forskydende spændinger mellem hovedarmering og beton. Hvis adhæsionen langs armeringens overflade er ringe - f.eks. ved anvendelse af armering uden forkamning - vil armeringen glide, og trækraften overføres til bjælkeenderne. Herved er der mulighed for, at betonbjælken kan virke som en bue med trækbånd, som antydnet på fig. 3.2. Foruden betingelsen om dårlig adhæsion må det kræves, at længdearmeringen er godt forankret ved understøtningen og at forholdet mellem spændvidde og nyttehøjde ikke

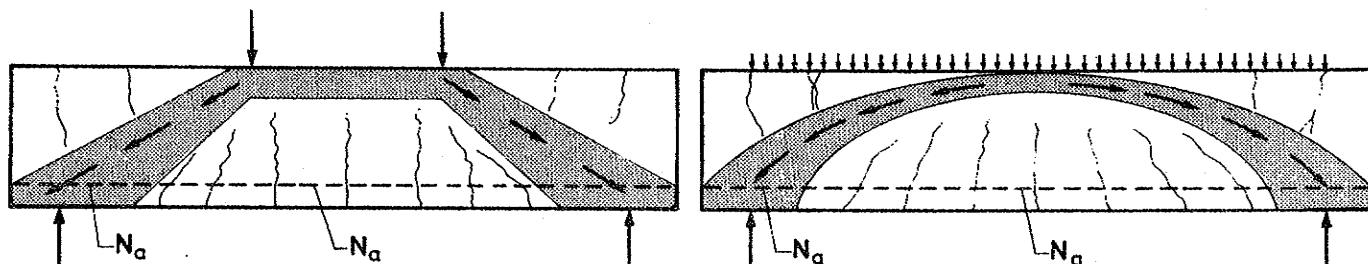


Fig. 3.2 Buevirkning.



er for stort. Belastningen skal angribe på bjælkens overside og reaktionen på dens underside. Belastningen må således ikke overføres gennem tværbjælker.

Leonhardt og Walther [62.9] har udført forsøg for at undersøge buevirkningen. 4 simpelt understøttede bjælker påvirket af to symmetriske enkeltkræfter blev belastet til brud. Armeringsforholdet var ens for alle bjælker, og længdearmeringens geometriske udformning var eneste forskel, idet denne ved to af bjælkerne bestod af glatte rundjern (fig. 3.3 c og d) og ved de to øvrige bestod af forkammet armering (fig. 3.3 a og b). Begge typer armering havde omtrent samme flyde-spænding. Inden for hver gruppe var armeringsarealet fordelt dels på få, dels på mange armeringsstænger. På de glatte armeringsstænger var der ud over understøtningen påsvejet forkammet armering for at forhindre forankringsbrud.

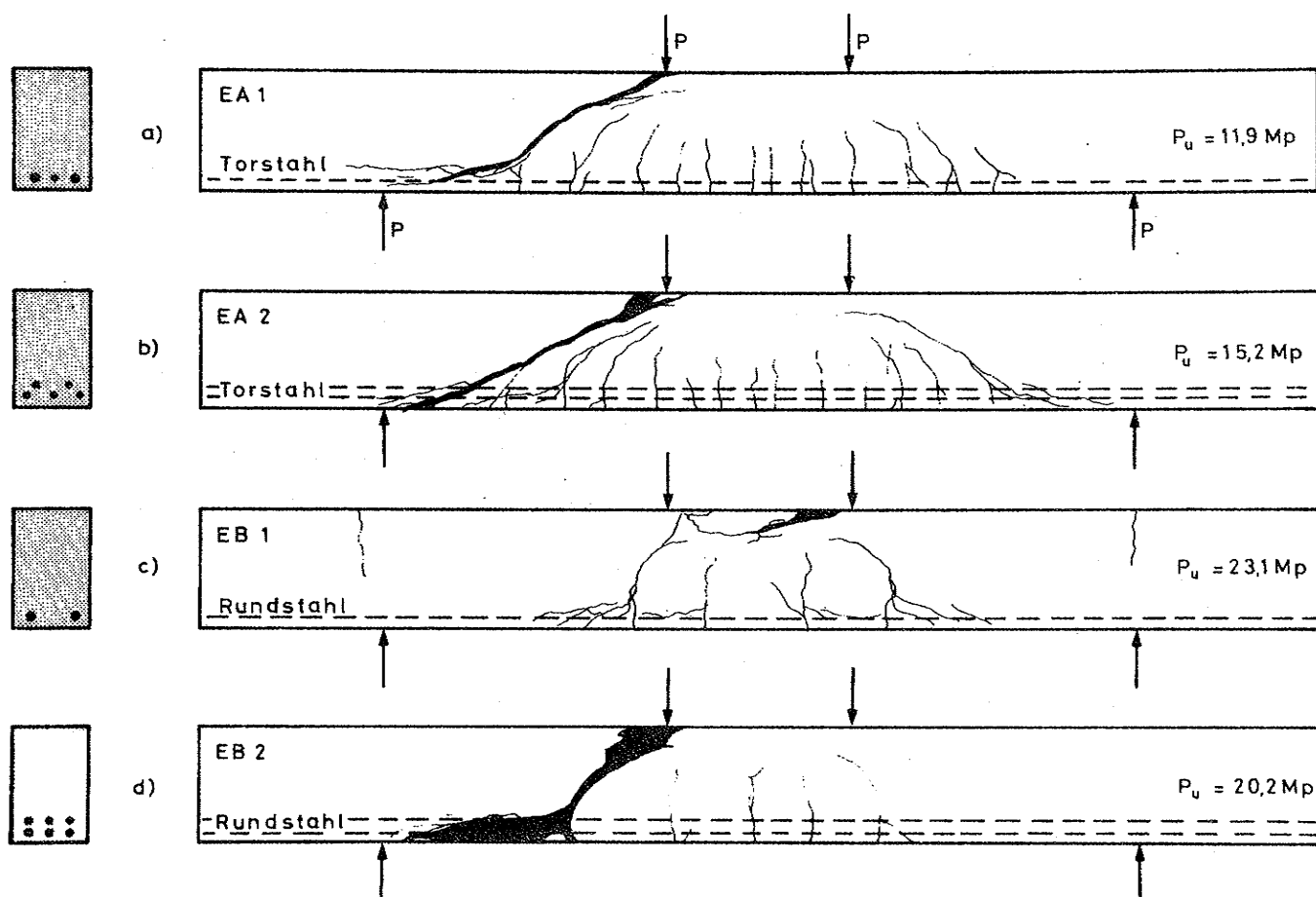


Fig. 3.3 Forsøg til belysning af buevirkningen. (Leonhardt og Walther [62.9]).

Forsøgene understreger kravet om dårlig adhæsion, hvis buevirkningen skal kunne udnyttes. Bjælken, der er armeret med 2 glatte rundjern, får ingen diagonalrevner og når fuld bøjningsbrudlast. På fig. 3.3c bemærkes trækrevnen over understøtningen i bjælkens overside. Denne revnedannelse er netop et tegn på, at buevirkningen er udnyttet. Ved de øvrige bjælker har adhæsionen været bedre, hvilket har medført en betydeligt højere brudlast, end de to bjælker med forkammet armering, idet den relativt dårlige adhæsion har medført, at diagonalrevnen først er dannet ved en højere belastning.

Forsøgene med forkammet armering viser derimod den modsatte tendens, idet bjælken med mange små armeringsstænger her har størst brudlast. Når betonen først revner, gælder det således om at opnå så god en samvirken mellem beton og armering som mulig. En anden årsag til, at bjælken med mange armeringsstænger holder mere, kan være, at dornvirkningen er bedre, når armeringsstængerne ligger i to lag.

De tilsvarende forsøg med jævnt fordelt belastning giver samme tendens som de ovenfor nævnte. Her nåede endog begge bjælker med glat armering bøjningsbrudlasten.

Ovennævnte forsøg har interesse derved, at de forklarer årsagen til diagonalrevnedannelsen, og at de understreger det allerede tidligere nævnte forhold, at armeringsforholdet ikke er tilstrækkelig til belysning af armeringens betydning for diagonalrevnelasten og forskydningsbrudlasten.

I praksis kan forholdene næppe udnyttes, da f.eks. rust på glatte armeringsstænger vil kunne medføre så god adhæsion, at fuld buevirkning ikke kan opnås. Endvidere er den høje forskydningsbrudlast betinget af en helt urimelig overlængde ud over understøtningen.

### 3.3 Brudform

Forsøg med normalt armerede, simpelt understøttede, rektangulære bjælker, der er belastet med en symmetrisk punktbelastning, viser, at der optræder en række forskellige brudtyper, der i store træk kan afgrænses ved bjælkens re-

lative forskydningsspændvidde  $\frac{a}{h}$ . Afgrænsningen ved  $\frac{a}{h}$ -forholdet er naturligvis kun grov og kan føres tilbage til dornvirkningens afhængighed heraf.

I det følgende er de forskellige brudformer omtalt, og på fig. 3.4 er de tilsvarende revnebilleder ved brud vist.

Brudformer for bjælker med jævnt fordelt belastning er omtalt i afsnit 3.4.5.

### 3.3.1 Bøjningsbrud. $6 < \frac{a}{h}$

For store værdier af  $\frac{a}{h}$  vil der normalt ikke opstå forskydningsbrud. Der vil ikke opstå egentlige diagonalrevner, men bøjningstrækrevner, der kun har en svag tendens til afbøjning mod belastningspunktet.

### 3.3.2 Diagonalt trækbrud. $3 < \frac{a}{h} < 7$

Ved dannelsen af den første bøjnings-forskydningsrevne spaltes bjælken, som vist på fig. 3.4d, idet diagonalrevnen på grund af manglende dornvirkning udbreder sig langs hovedarmeringen. Bruddet er helt uvarslet.

### 3.3.3 Forskydningstrykbrud $1 < \frac{a}{h} < 3$

Under forudsætning af at længdearmeringens forankring ved understøtningen er tilstrækkeligt god, vil diagonalrevnen udvikle sig mod betontrykzonen. Dette foregår langsomt under stigende belastning, og bruddet er således varslet. Revnebilledet ved brud er som vist på fig. 3.4a. Brudformen kan minde om forholdene ved et bøjningstrækbrud, hvor betontrykzonen knuses efter længere tids flydning i længdearmeringen. Ved forskydningstrykbruddet er der dog ikke flydning i hovedarmeringen. De store tøjninger i betontrykzonen, der medfører brud, skyldes derimod åbningen af en eller flere bøjnings-forskydningsrevner på strækningen  $c$  (fig. 3.4a).

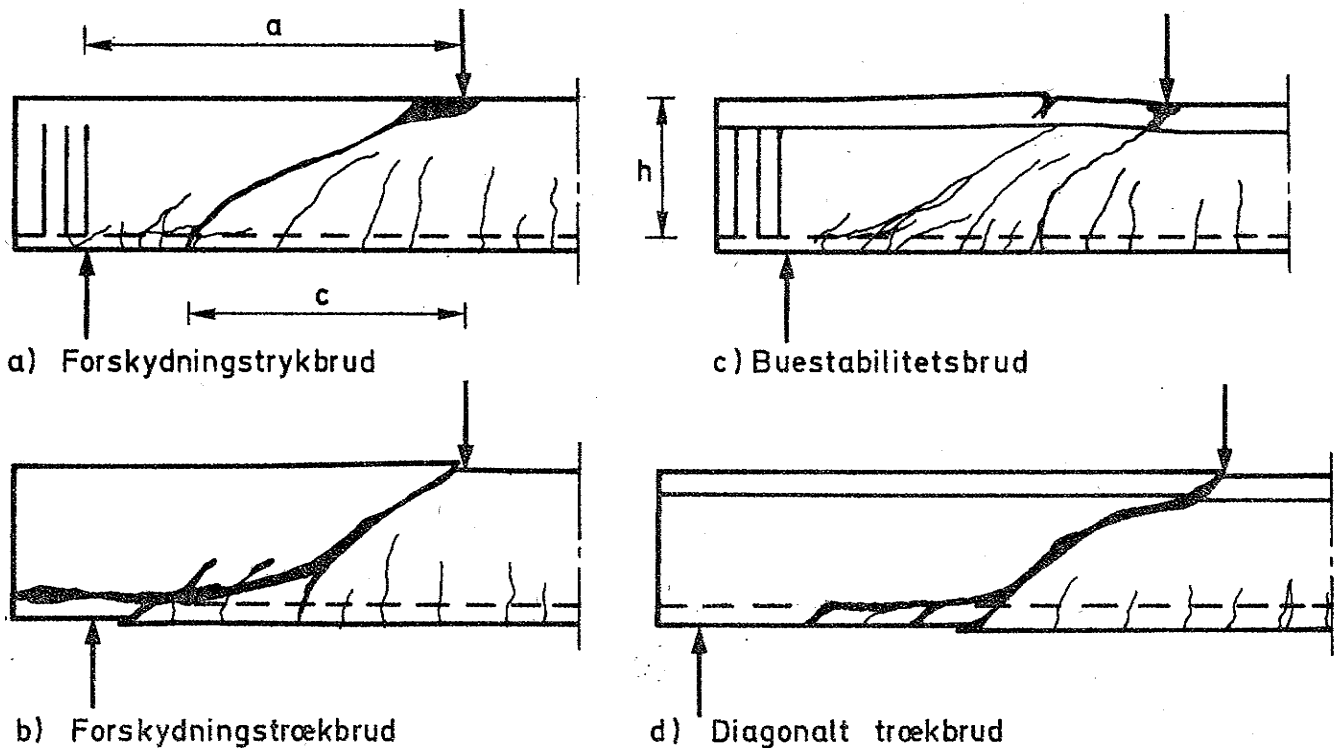


Fig. 3.4 Revnebillede ved forskydningsbrud.

### 3.3.4 Forskydningstrækbrud. $2 < \frac{a}{h} < 4$

Når betontrykzonen er tilstrækkeligt stærk til at forhindre diagonalrevnens udbredelse i denne retning, f.eks. ved T-bjælker, vil revnen under øget belastning udvikle sig langs hovedarmeringen mod understøtningen. Ved brud adskilles armeringen fra betonen, og bruddet har karakter af et forankringsbrud. Modsat forskydningstrykbruddet skyldes forskydningstrækbruddet svigtende dornvirkning og er mindre varslet end dette.

Ved laboratorieforsøg udformes forankringszonen ofte urealistisk stærk f.eks. ved anvendelse af forankringsplader eller ved en udkraget ende forsynet med bøjler, som antydnet i fig. 3.4a. Herved forhindres forskydningstrækbruddet svarende til, at denne brudform af mange forskere betragtes som sekundær i forbindelse med forskydningsbrud. Dette er uheldigt, da hovedarmeringens forankring netop er afgørende for både dorn- og buevirkning.

### 3.3.5 Buestabilitetsbrud. $1 < \frac{a}{h} < 4$

Især ved T-bjælker, hvor diagonalrevnen ofte forløber et stykke langs trykflangens underside, er der mulighed for et stabilitetsbrud i trykflangen. Bruddet indledes med dannelsen af en eller flere trækrevner i trykflangens overside, som det er vist på fig. 3.4c. Årsagen til denne brudform er, at tryklinien falder uden for den opståede trykbues (afsnit 3.2) kerneareal på grund af den fremadskridende diagonalrevnedannelse. Bruddet er varslet.

### 3.3.6 Konklusion

De ovenfor nævnte betragtninger er kun en grov inddeling, hvor det endelige brud ofte vil være en kombination af en eller flere af de her nævnte brudtyper. Især for  $\frac{a}{h} < 4$  er det vanskeligt at skelne mellem de forskellige typer. Følgende tilnærmede inddeling i to hovedtyper kan foretages:

- 1)  $3 < \frac{a}{h} < 7$ , hvor der opstår diagonalt trækbrud, der er helt uvarslet, idet dannelsen af diagonalrevnen medfører øjeblikkeligt brud.
- 2)  $1 < \frac{a}{h} < 4$ , hvor bruddet er en kombination af forskydningstrykbrud, forskydningstrækbrud og buestabilitetsbrud karakteriseret ved, at der ved kraftomlejring kan ske en vis lastøgning efter diagonalrevnedannelsen. Revnen vil i store træk åbne sig svarende til en rotation omkring dens øvre endepunkt, der samtidig bevæger sig mod trykzonen.

### 3.4 Væsentlige parametre

Forskydningsbrudlasten  $\tau_u$  er i det følgende udtrykt i lighed med definitionen af diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  (2.6)

$$\tau_u = \frac{T_u}{b_o h} \quad (3.4)$$

hvor  $T_u$  er forskydningskraften i et normalsnit ved diagonalrevnens øvre endepunkt (snit B-B på fig. 3.1).  $b_0$  er bjælkekroppens tykkelse, og  $h$  er nyttehøjden.

Ved betragtning af forholdene vedrørende forskydningsbrudlastens størrelse anvendes endvidere ofte den relative forskydningsbrudlast  $r_u$

$$r_u = \frac{M_u}{M_F} \quad (3.5)$$

hvor  $M_F$  er det forventede bøjningsbrudmoment (beregnet efter appendix A) og  $M_u$  er bøjningsmomentet i det tilsvarende snit ved forskydningsbrudlasten.  $r_u$  angiver således, hvor stor en del forskydningsbrudlasten udgør af bøjningsbrudlasten. Når denne fremstilling af forskydningsbrudlasten anvendes, skyldes det, at forsøg viser, at  $r_u$  afbildet som funktion af  $\frac{a}{h}$ -forholdet har et minimum for  $\frac{a}{h}$  lig 3-4. Hvor  $\frac{a}{h}$  er mindre end  $\frac{a}{h}$ -værdien svarende til dette minimum, vil forskydningsbrudlasten være større end diagonalrevnelasten, mens  $\tau_u$  ellers er lig  $\tau_{cr}$  (se nærmere i afsnit 3.4.1 og på fig. 3.5b).

Understøtningsformen har en væsentlig betydning for forskydningsbrudlastens størrelse, idet en betingelse for en væsentlig dornvirkning eller buevirkning er, at reaktionen virker direkte på bjælkens underside. Understøttes bjælken indirekte gennem tværbjælker, vil tendensen til opspaltning langs hovedarmeringen yderligere forstærkes ved, at der optræder skadelige trækspændinger på tværs af bjælken. Forsøg af bl.a. Ferguson [56.1] og Taylor [60.2] viser således, at der ikke vil foregå nogen væsentlig lastøgning efter diagonalrevnedannelsen, når bjælken er understøttet indirekte.

I det følgende vil kun forholdene ved direkte belastede bjælker, hvor  $\frac{a}{h}$  er mindre end ca. 3 blive behandlet. Denne afgrænsning indsnævres yderligere ved, at kun forskydningstrykbrudlasten  $\tau_{uc}$  betragtes, idet kun denne har betydning for forskydningsarmerede bjælker (afsnit 4).

#### 3.4.1. Relativ forskydningsspændvidde $\frac{a}{h}$

$\frac{a}{h}$ -forholdets indflydelse på dornvirkningen er allerede

behandlet i afsnit 3.1 og 3.3. Forsøg af bl.a. Morrow og Viest [57.1], Leonhardt og Walther [62.9] og Kani [66.5] viser, at  $\tau_u$  tilnærmet kan regnes at være omvendt proportional med  $\frac{a}{h}$ . På fig. 3.5 er vist resultaterne fra Morrow og Viests forsøg, hvor diagonalrevnelastens afhængighed af  $\frac{a}{h}$ .

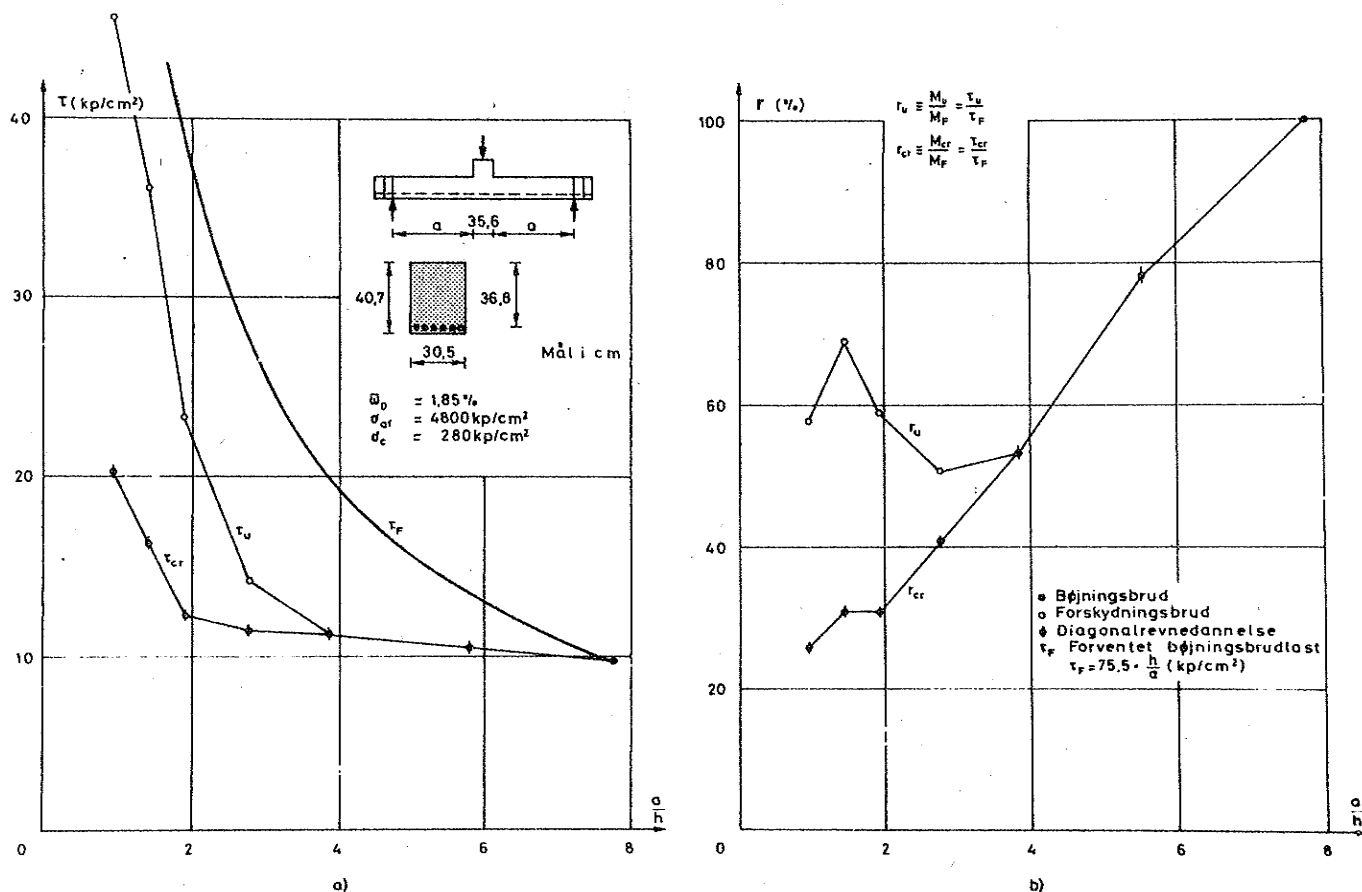


Fig. 3.5 Forskydningsbrudlastens afhængighed af den relative forskydningsspændvidde. (Forsøg af Morrow og Viest [57.1]).

allerede har været afbildet på fig. 2.7. Størrelsen  $r_{cr}$  på fig. 3.5b er defineret ud fra diagonalrevnelasten, idet index u i (3.5) erstattes af index cr.

### 3.4.2 Længdearmering

Da spredningen af  $\tau_u$  ved forskydningsforsøg er ret betydelig, jfr. afsnit 3.3.4 - bl.a. som følge af varierende

udformning af forankringszonen - er der ikke foretaget nogen afbildning af forskydningsbrudlasten som funktion af armeringsforholdet  $\bar{u}_{a0}$ . Angående forsøg herom kan der henvises til afsnit 2.2.2.  $\tau_u$ 's tilnærmede afhængighed af  $\bar{u}_{a0}$  fremgår af formlerne i afsnit 3.5. I det følgende er der behandlet nogle enkelte problemer i forbindelse med længdearmeringens betydning for  $\tau_u$ , der ikke kommer til udtryk gennem disse formler.

Armeringsforholdet kan, ligesom det er nævnt ved diagonalrevnelasten, ikke entydigt udtrykke længdearmeringens indflydelse. For dornvirkningen har således både adhæsionen, armeringsstængernes modstandsmoment og betonen mellem stængerne betydning. Med fastholdt armeringsareal er adhæsionen størst, når der anvendes mange små stænger, mens de to sidstnævnte bidrag er størst, når der findes få store stænger. Forsøg antyder endvidere, at en placering af stængerne i flere lag giver større dornvirkning, hvilket kan forklares ved, at afstanden fra armeringens overside til bjælkens underside i dette tilfælde er større.

Af fig. 3.1 og af ligning (3.3b) i afsnit 3.1 fremgår det, når der ses bort fra dornvirkningen, at hovedarmeringens trækraft  $N_a$  i snit A-A ved diagonalrevnens nederste punkt beregnes ud fra bøjningsmomentet  $M_B$  i snit B-B ved diagonalrevnens øverste punkt. Trækraften  $N_a$  i forskydningsfaget kan derfor ikke beregnes på samme måde, som det sker i momentfaget ( $\frac{M_A}{z}$ , jfr. (2.12) i afsnit 2.2). Dette er også konstateret ved forsøg af bl.a. Mains [51.1], hvor tøjningerne langs længdearmeringen blev målt ved hjælp af strain gages.

For simpelt understøttede bjælker belastet af to enkeltkræfter medfører dette, at længdearmeringen ikke kan afkortes, idet snit A-A på grund af spændingskoncentrationen vil ligge, hvor armeringen afsluttes. Dette er i overensstemmelse med forsøg af bl.a. Baron [66.2].

Ved kontinuerlige eller indspændte bjælker gælder tilsvarende, at momentnulpunktet ikke samtidig er nulpunkt for



længdearmeringens trækraft. Sammen med den ubestemthed, der er ved fastlæggelse af momentnulpunktet for statisk ubestemte konstruktioner, medfører dette, at der skal udvises varsomhed ved enhver afkorting af længdearmering. Ovennævnte forhold er undersøgt ved forsøg af bl.a. Estner og Hognestad i forbindelse med sammenstyrtingen af en lagerbygning i U.S.A. [57.2].

### 3.4.3 Betonstyrke

Diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  afhænger, når betontrykstyrken  $\sigma_c$  varieres, af betonens trækstyrke og elasticitetsmodul (jfr. afsnit 2). Da forskydningstrykbruddet skyldes en knusning af betonens trykzone, må det forventes, at forskydningstrykbrudlasten  $\tau_u$ 's afhængighed af  $\sigma_c$  er mere udpræget, end tilfældet var med  $\tau_{cr}$ .

Som nævnt i foregående afsnit er der ikke foretaget nogen afbildning af forsøgsresultater. Angående forsøg henvises til afsnit 2.2.1.

### 3.4.4 Tværsnitsform

Forholdene for T-bjælker kan, svarende til hvad der er nævnt ved diagonalrevnelasten, ligestilles med rektangulære bjælker med samme  $\bar{w}_{ao}$ . På fig. 2.9 (afsnit 2.2.5) er dette underbygget af forsøg af Kani [68.4]. Det fremgår heraf, at forskydningsbrudlasten  $\tau_u$  for T-bjælkerne er noget højere end  $\tau_u$  for de rektangulære bjælker, når  $\frac{a}{h} < 2$ , hvilket skyldes trykflangens gunstige indflydelse.

### 3.4.5 Belastningsform

Forsøg med jævnt fordelt belastning (henvisninger findes i afsnit 2.2.3) viser, at forskydningsbrudlasten  $\tau_u$  er identisk med diagonalrevnelasten for  $\frac{l}{h}$  større end ca. 12. For aftagende værdier af  $\frac{l}{h}$  foregår en svag stigning af  $\tau_u$ , som det fremgår af fig. 3.6, hvor resultaterne fra Leonhardt og Walthers forsøg [62.9] er afbildet. Til sammenligning er endvidere angivet resultaterne fra tilsvarende forsøg med punktbelastede bjælker. Som abscisse er der valgt  $\frac{l}{4h} = \frac{a}{h}$ .

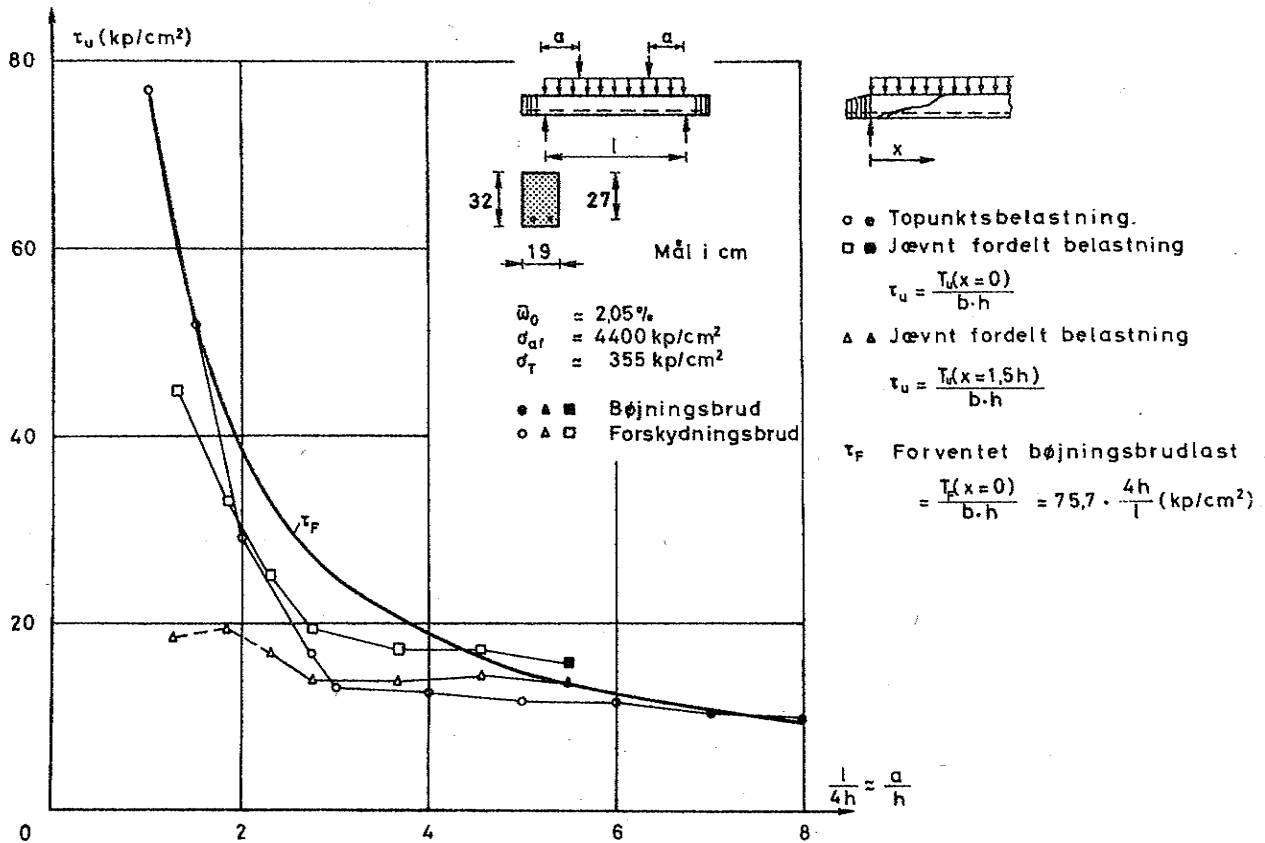


Fig. 3.6 Forskydningsbrudlastens afhængighed af  $l/h$ .  
(Forsøg af Leonhardt og Walther [62.9]).

hvorved den forventede bøjningsbrudlast  $\tau_F$  afbildes i samme kurve for de to belastningstyper.

Nogle få forsøg med gentagende jævnt fordelt belastning er foretaget af Krefeld og Thurstone [62.8]. Forsøgene antyder, at diagonalrevnelasten må regnes som brudlast ved denne belastningsform, idet ganske få gentagelser af belastningen, når denne er større end diagonalrevnelasten, vil medføre brud.

### 3.5 Beregningsformler

Ved beregning af en bjælkes forskydningsbrudlast er det af hensyn til bjælkens forskellige virkemåde før og efter diagonalrevnedannelsen nødvendigt at opstille to forskellige beregningsformler. Den ene formel bestemmer bjælkens diagonalrevnelast  $\tau_{cr}$  og den anden forskydningstrykbrudlasten

$\tau_{uc}$ .

Vanskeligheden ved bestemmelsen af brudlasten, når denne ikke er identisk med diagonalrevnelasten, skyldes hovedsagelig ubestemtheden ved kraftomlejringen, der bl.a. giver sig udslag i betydelig spredning ved selv omhyggeligt udførte laboratorieforsøg. Så godt som alle forfattere, der beskæftiger sig med dette emne, undersøger som tidligere nævnt kun forskydningstrykbrudlasten, idet det forudsættes, at forskydningstrækbrud er forhindret.

I afsnit 3.5.1 til 3.5.3 vil der blive givet en kort gennemgang af de tre hovedprincipper, der anvendes af de fleste forfattere ved udledning af udtryk for forskydningstrykbrudlasten, der i disse tilfælde udtrykkes ved forskydningstrykbrudmomentet  $M_u$ .  $\tau_{uc}$  og  $M_u$  er for punktbelastede bjælker knyttet sammen ved udtrykket

$$\tau_{uc} = \frac{T_u}{b_o h} = \frac{M_u}{ab_o h} \quad (3.6)$$

Herefter vil to forfatteres formler blive omtalt. Endvidere omtales en formel, der er bestemt ved lineær regressionsanalyse af en række forsøgsresultater.

#### 3.5.1 Statiske betingelser

Ligevægtsligningerne for den diagonalrevnede bjælke er anført i afsnit 3.1. Momentligningen (3.3b) anvendes, idet  $T_a$  regnes lig 0. Ved anvendelse af (3.1) fås

$$M_u = N_b z \quad (3.7)$$

Ved at se bort fra  $T_a$  bliver  $M_u$  noget mindre, men da der i

kompatibilitetsbetingelserne indgår en empirisk konstant, er det delvis muligt at kompensere herfor.

### 3.5.2 Fysiske betingelser

For langedearmeringen regnes Hookes lov gældende, idet denne ikke antages at blive belastet ud over proportionalitetsgrænsen, hvilket er i overensstemmelse med forsøgsresultater. For betontrykzonen anvendes en parabolisk eller lineær arbejdslinie. Den valgte brudbetingelse for betonen kan variere betydeligt. Nogle forskere f.eks. Bjuggren [62.4] og Regan [68.10] regner med, hvad der gælder for ren bøjning, altså  $\epsilon_{bu} = (3-3,5)^{0/00}$  og en tilsvarende maksimal betontrykspænding  $\sigma_{bu}$  i oversiden lig  $\sigma_c$  eller  $\sigma_T$ . Når trykzonens højde betegnes  $x$ , og tøjningen i langedearmeringen (snit A-A fig. 3.1) svarende til brud i betontrykzonen betegnes  $\epsilon_a$ , fås:

$$N_b = k_1 \sigma_{bu} b x \quad (3.8)$$

$$N_a = \epsilon_a E_a (\bar{w}_0 b h) \quad (3.9)$$

$E_a$  er armeringens elasticitetsmodul, og  $k_1$  er en konstant, der afhænger af betonens arbejdskurve.

Andre forskere, bl.a. Guralnick [59.2], Walther [62.15], Thürlimann og Warner [63.12], Weigler og Becher [64.11], Ojha [67.14] og S.R. Iyengar og V. Rangan [67.20] anvender et brudkriterium, hvor der tages hensyn til forskydningsspændingerne i betontrykzonen. Dette medfører meget komplicerede beregninger, der må betegnes som overflødige af tre årsager. Dels kendes spændingsfordelingen i trykzonen ikke, og dermed kombinationen af forskydnings- og normalspændinger. Dels hersker der stor usikkerhed vedrørende et brudkriterium for en sådan kombineret spændingstilstand, og endelig ses der altid bort fra de spændinger vinkelret på bjælkeaksen, som belastninger fremkalder på bjælkens overside. Disse spændinger vil delvis kunne kompensere den reduktion af de tilladelige trykpåvirkninger, som forskydningsspændingerne giver.

### 3.5.3 Kompatibilitetsbetingelser

Det er ved fastlæggelsen af disse betingelser, at de største vanskeligheder ligger. Alle antagelser må betegnes som fuldstændigt empiriske, hvilket, som allerede antydnet, er årsag til, at de forskellige teorier alligevel giver passende overensstemmelse med forsøg.

Bjuggren og Regan anvender betragtninger om de endelige deformationer af længdearmeringen  $\Delta_a$  og betontrykzonen  $\Delta_b$  fra snit A-A til B-B på fig. 3.1. Endvidere regnes plane tværsnit at forblive plane på denne strækning, hvilket giver

$$\frac{x}{h} = \frac{\Delta_b}{\Delta_b + \Delta_a} \quad (3.10)$$

$\Delta_b$  og  $\Delta_a$  bestemmes empirisk som simple funktioner af  $\epsilon_a$  og  $\epsilon_{bu}$ .

Ved betragtninger om bjælkens relative rotation omkring diagonalrevnens toppunkt, når Walther og Ojha frem til et tilsvarende udtryk, der imidlertid indeholder den ukendte brudlast, således at  $M_u$  ikke kan findes explicit.

### 3.5.4 Bjuggren

Bjuggren [62.4] antager  $k_1 = \frac{1}{3}$ ,  $z = (h - 0,4x)$  og  $\sigma_{bu} = \sigma_T$ . Indsat i (3.7) og (3.8) findes

$$M_u = \frac{1}{3} \sigma_T b h^2 \left(1 - 0,4 \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h} \quad (3.11)$$

Endvidere sættes  $\Delta_b = \frac{\epsilon_{bu}}{k_2}$  og  $\Delta_a = \epsilon_a c$ . Produktet af  $k_2$  og

diagonalrevnens projektion  $c$  på vandret regnes konstant. Indsættes  $\Delta_b$  og  $\Delta_a$  i (3.10) og anvendes (3.8) og (3.9) findes følgende udtryk for nulliniens beliggenhed (jfr. afsnit 2.3.4)

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{g^2 + 4g} - g \right) \quad (3.12)$$

hvor

$$g = \frac{2\bar{w}_0 E_a \epsilon_{bu}}{\sigma_T (k_2 c)} \quad (3.13)$$

I almindelighed er  $g < 0,1$ , hvilket ifølge Bjuggren medfører, at (3.11) tilnærmet kan udtrykkes som

$$M_u = \frac{1}{3} \sigma_T b h^2 g^{0,436} \quad (3.14)$$

Anvendes værdierne  $\epsilon_{bu} = 3 \text{ } ^\circ/\text{oo}$ ,  $ck_2 = 8$ , (jfr. Bjuggren),  $E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$  og  $\sigma_c = 0,8\sigma_T$  findes følgende udtryk for forskydningstrykbrudlasten  $\tau_{uc}$  for rektangulære bjælker belastet med enkeltkræfter

$$\tau_{uc} = 9,45 \frac{h}{a} (\sigma_c)^{0,564} (\bar{w}_0)^{0,436} \quad (3.15)$$

hvor  $\sigma_c$  og  $\tau_{uc}$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ .

### 3.5.5 Regan

Regan [68.10] antager en parabolisk arbejdslinie for betonen, hvilket medfører, at  $k_1 = \frac{2}{3}$  og  $z = (h - \frac{3}{8} x)$ . Idet  $\sigma_{bu} = \sigma_c = 0,8\sigma_T$  fås

$$M_u = \frac{2}{3} \sigma_c b h^2 \left(1 - 0,375 \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h} \quad (3.16)$$

Ud fra forsøg finder Regan, at  $\frac{x}{h}$  kan bestemmes som

$$\frac{x}{h} = \frac{\left(\frac{x_0}{h}\right)^2}{\frac{x_0}{h} + \frac{T_c}{M}} \quad (3.17)$$

hvor revnens projektion  $c$  på vandret (fig. 3.1) regnes lig  $a$ , når bjælken er uden forskydningsarmering.  $x_0$  er trykzonens højde ved diagonalrevnelasten bestemt af (2.33) og (2.34) i afsnit 2.3.4.

Regan angiver, at (3.16) tilnærmet kan skrives som

$$M_u = 17,8 \frac{M}{T_c} b h^2 (\sigma_c \bar{w}_0)^{\frac{1}{3}} \quad (3.18)$$

eller for punktbelastede bjælker, idet  $c$  regnes lig  $a$

$$\tau_{uc} = 17,8 \frac{h}{a} (\sigma_c \bar{w}_0)^{\frac{1}{3}} \quad (3.19)$$

hvor  $\tau_{uc}$  og  $\sigma_c$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ . \* Denne tilnærmelse er i modsætning til den af Bjuggren anførte ikke i god overensstemmelse med det oprindelige udtryk. Potensen  $\frac{1}{3}$  er for lille, hvilket medfører, at (3.18) for relativt store  $\sigma_c$  og  $\bar{w}_0$  giver op til 20% lavere værdier end (3.16).

Ifølge Regan har (3.16) for 211 punktbelastede, simpelt understøttede, rektangulære bjælker, der får forskydningsstrykbrud, en middelværdi af beregnet ( $M_u$ )/målt ( $M_u$ ) på 0,80 og en variationskoefficient på 19%. De tilsvarende tal for (3.18) er 0,75 og 19%.

Regan angiver, at (3.19) kan anvendes for T-bjælker, når  $\bar{w}_0$  erstattes af armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ , beregnet m.h.t. kropbredden  $b_o$ .

### 3.5.6 Kennedy

Kennedy [67.8] anvender lineær regressionsanalyse til bestemmelse af forskydningstrykbrudmomentet. På grundlag af 89 forsøg med simpelt understøttede, punktbelastede, rektangulære bjælker, der fik forskydningstrykbrud, findes følgende udtryk

$$\tau_{uc} = 52,2 (\sigma_c)^{0,349} (\bar{w}_0)^{0,500} \left(\frac{h}{a}\right)^{1,169} \quad (3.20)$$

hvor  $\tau_{uc}$  og  $\sigma_c$  indsættes i  $\text{kp/cm}^2$ . Standardafvigelsen er 14%.

Kennedy undersøger også betydningen af længdearmeringens flydespænding og nyttehøjden, men finder ingen significant afhængighed heraf.

### 3.5.7 Sammenligning af beregningsformler

En sammenligning af  $\tau_{uc}$  for de tre ovennævnte beregningsudtryk viser, at disse ikke afviger væsentligt fra hinanden.

---

\* se fodnote afsnit 2.3.1

Forskellen i afhængighed af de tre parametre  $\bar{w}_0$ ,  $\sigma_c$  og  $\frac{a}{h}$  er kun ubetydelig, som det også direkte fremgår af (3.15), (3.19) og (3.20).

Den største afvigelse findes ved Regans formel, idet middelværdien af beregnet ( $\tau_{uc}$ )/målt ( $\tau_{uc}$ ) er ca. 0,8, hvor den ved de to øvrige formler er ca. 1,0.

### 3.6 Resume

Efter diagonalrevnelasten vil der foregå en kraftomlejring, idet de indre kræfter fordeles på to bidrag, ét fra forskydning i længdearmeringen og ét fra forskydning i betontrykzonen. Bjælken må således opfattes som et foranderligt system, hvilket medfører stor spredning ved forsøg og tilsvarende usikkerhed ved beregning af brudlasten.

Afgørende for, om der kan foregå en stigning af belastningen ud over diagonalrevnelasten, er, om en vandret opspaltning af betonen langs længdearmeringen kan undgås. Dette er kun muligt ved relativt kort bjælker ( $\frac{a}{h} < 3$ ), og ellers kun når reaktionen virker på bjælkens underside. Ved indirekte belastning og forholdsvis lange bjælker vil forskydningsbrudlasten være identisk med diagonalrevnelasten, og forskydningsbruddet vil da være uvarslet.

For bjælker, hvor belastningen virker direkte på over- og underside, er det med tilnærmelse muligt at bestemme forskydningsstrykbrudlasten  $\tau_{uc}$  ved hjælp af en af de empiriske formler fra afsnit 3.5 - selv om nøjagtigheden ikke er overvældende god. Samtidig beregnes diagonalrevnelasten  $\tau_{cr}$  fra afsnit 2.3 og den maksimale værdi af  $\tau_{cr}$  og  $\tau_{uc}$  angiver da forskydningsbrudlasten.

Formler til beregning af brudlasten ved forskydnings-trækbrud mangler stadig.

Forholdene efter diagonalrevnens dannelse for bjælker uden forskydningsarmering er således langt fra afklaret, hvilket imidlertid næppe har større praktisk betydning. Forskydningsbrudlasten bør, jfr. hvad der gælder i de amerikanske normer, altid regnes lig diagonalrevnelasten, idet en lastøgning herudover kun kan finde sted ved specielle belastnings- og understøtningsformer.



#### 4. Brudlast for bjælker med forskydningsarmering

##### 4.1 Forskydningsarmeringens virkemåde

Som det allerede tidligere er nævnt, vil en forskydningsarmering udformet som bøjler ingen indflydelse have på bjælkens virkemåde inden diagonalrevnedannelsen. Dette er konstateret ved forsøg, bl.a. af Moody m.f. [54.1], Leonhardt og Walther [62.9], Özden [67.19] og Sørensen [70.1]. Ved forfatterens forsøg [70.1] med T-bjælker, hvor bøjler er vinkelret på bjælkeaksen, er tøjningerne i bøjlerne målt ved anvendelse af strain gages, og på fig. 4.1 er tøjningsforløbet vist som funktion af belastningen. Det ses heraf, at inden diagonalrevnedannelsen er bøjlerne næsten spændingsløse. Efter diagonalrevnens dannelse vokser tøjningerne omtrent proportionalt med belastningen for de bøjler, der passerer

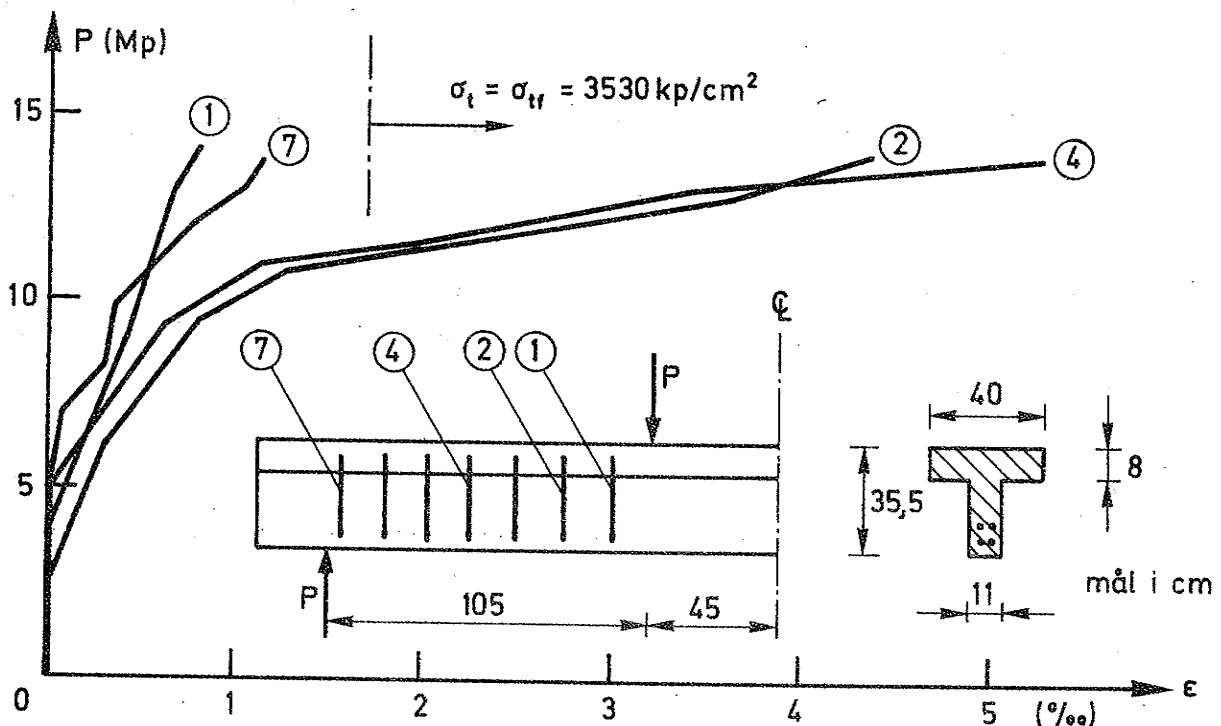


Fig. 4.1 Tøjningerne i bøjlerne som funktion af belastningen for T-bjælker. (Forsøg af Sørensen [70.1]).

af den først dannede diagonalrevne. Først nogle lasttrin senere kommer der tøjninger af betydning i bøjlerne nærmest understøtningen, hvilket svarer til, at der her dannes nye diagonalrevner. Erfaringen fra disse og andre forsøg er, at bøjlerne primært påvirkes til træk og kun i ganske ringe grad til forskydning.

Sammenholdes dette med revnebillederne for bjælker uden forskydningsarmering (fig. 3.4) findes, at formålet med en forskydningsarmering først og fremmest er at begrænse diagonalrevnernes udbredelse mod trykzonen og langs længdearmeringen.

For at forhindre en spaltning langs længdearmeringen skal bøjlerne bukkes omkring denne og placeres bag diagonalrevnen, d.v.s. i retning af aftagende moment. Herved bliver der mulighed for at overføre forskydende spændinger mellem hovedarmeringen og betonen. En sådan forskydningsarmering vil give mulighed for en betydelig dornvirkning, hvilket også er bekræftet ved forsøg. Således har Krefeld og Thurstone [62.8] og Baumann [68.2] udført forsøg med rektangulære bjælker, der indeholdt en præfabrikeret diagonalrevne. Bag revnen er der placeret en bøjle, og forsøgene viser, at denne vil have samme virkning som en understøtning, indtil dens flydelast er nået. Ved beregning af bjælkens forskydningsbrudlast skal afstanden fra belastningspunktet til bøjlen derfor opfattes som forskydningsspændvidden. På grund af  $\frac{a}{h}$ -forholdets afgørende betydning for forskydningsbrudlastens størrelse, forklarer dette, at tilstedeværelsen af en enkelt bøjle i afstanden ca.  $h$  fra belastningspunktet vil give en betydelig stigning af bjælkens brudlast. Ovenstående underbygges af forsøg udført af bl.a. Rüsch og Mayer [67.15], Özden [67.19] og Kani [69.4].

Diagonalrevnens udvikling mod trykzonen forhindres ved at indlægge armering, der krydser revnen. Denne armering erstatter betonens manglende trækstyrke på samme måde, som længdearmeringen gør det efter dannelsen af bøjningstrækrevner. Forsøg af bl.a. Özden [67.19] og Kani [69.5] viser, at selv en enkelt bøjle, der er placeret, hvor diagonalrevnen fremkommer, vil medføre en betydelige forøgelse af bjælkens

brudlast.

De to former for revnebegrænsning kan naturligvis ikke adskilles fuldstændigt, idet de hver for sig indvirker på hinanden. En forskydningsarmering, der findes bag den første diagonalrevne, vil endvidere også kunne udnyttes til begrænsning af senere dannede diagonalrevners udbredelse mod trykzonen.

Da forskydningsarmeringen hovedsagelig påvirkes til træk og ofte flyder, inden bjælken når brudlasten, er det nødvendigt, at denne armering er godt forankret i bjælkens trykzone.

#### 4.2 Kraftomlejring

Efter at diagonalrevnen er dannet, vil der, ligesom det er nævnt for bjælker uden forskydningsarmering, foregå en omlejring af de indre kræfter. Som nævnt i det foregående afsnit, vil en forskydningsarmering først fra dette lasttrin få væsentlige tøjninger.

På fig. 4.2 er vist de kræfter, der virker på et snit langs en diagonalrevne. Den  $i$ -te forskydningsarmeringsstangs tværsnitareal, spænding og vinkel med bjælkeaksen betegnes  $A_t^i$ ,  $\sigma_t^i$  og  $\alpha^i$ , hvor  $i$  løber fra 1 til det antal bøjler, der

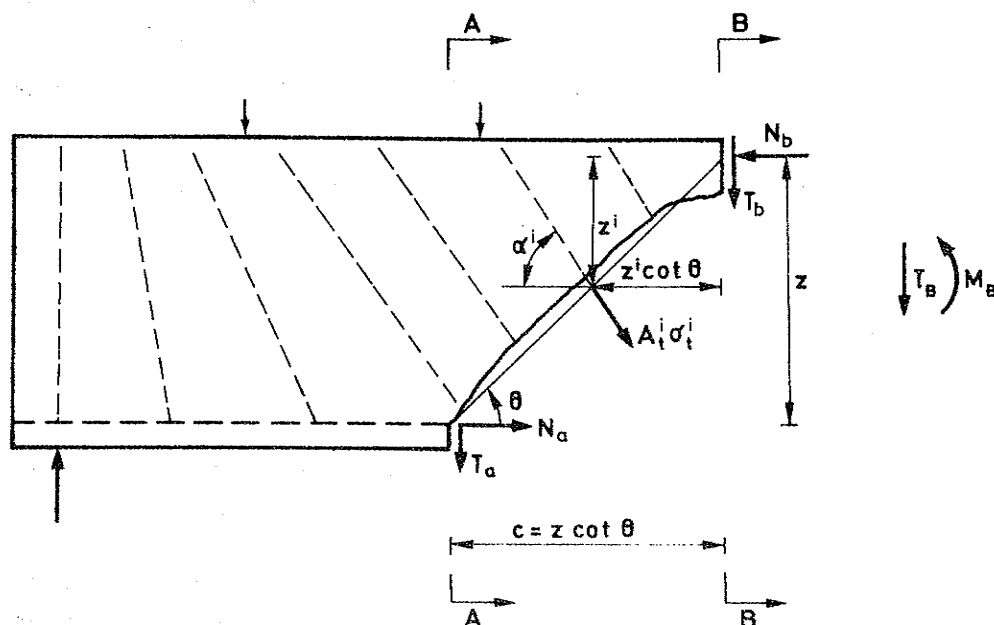


Fig. 4.2 Snitkraftfordeling i diagonalrevnet bjælke.

krydser diagonalrevnen. Denne regnes tilnærmet at forløbe retliniet mellem  $N_a$  og  $N_b$ 's angrebepunkter, jfr. fig. 4.2.  $M_B$  og  $T_B$  betegner snitkræfterne henført til normalsnit B-B ved diagonalrevnens øverste punkt, mens de øvrige betegnelser fremgår af figuren. De statiske betingelser giver da følgende ligninger:

Projektion på bjælkeaksen:

$$0 = N_a + \sum_i A_t^i \sigma_t^i \cos \alpha^i - N_b \quad (4.1)$$

Projektion vinkelret på bjælkeaksen:

$$T_B = T_a + T_b + T_t \quad (4.2a)$$

hvor

$$T_t = \sum_i A_t^i \sigma_t^i \sin \alpha^i \quad (4.2b)$$

Her angiver  $T_t$  bøjlernes bidrag til forskydningsoptagelsen og  $T_b$  resultanten af forskydningsspændingerne i betontrykzonen.  $T_a$  angiver dornvirkningen, der som allerede nævnt kan blive betragtelig, når der findes forskydningsarmering umiddelbart bag snit A-A. Når afstanden fra reaktionen til snit A-A er større end ca.  $z$ , vil  $T_a$  ikke kunne blive større end svarende til den bagved liggende bøjles flydekraft, jfr. foregående afsnit. Hvis denne bøjle når flydning, vil revnen blive fladere, og en ny bøjle vil overtage dornvirkningen samtidig med, at revnen også udvikler sig mod trykzonen. Sidstnævnte forhold sætter en grænse for, hvor flad revnen kan blive, svarende til at forskydningstrykbrudlasten bliver mindre for voksende  $\frac{a}{h} \sim \cot \theta$ .

Momentligning om  $N_b$ 's angrebepunkt:

$$M_B = N_a z + T_a z \cot \theta + \sum_i A_t^i \sigma_t^i z^i \sin \alpha^i (\cot \theta + \cot \alpha^i) \quad (4.3)$$

$\sum_i$  omfatter summation over al forskydningsarmering, der gennemskæres af revnen med hældning  $\theta$ .

Hvor forskydningsarmeringen består af forholdsvis tætliggende bøjler med samme afstand  $t$  - målt langs bjælkeaksen - og med samme hældning  $\alpha$ , vil ovennævnte formler blive

noget simplere. I forbindelse hermed indføres forskydningsarmeringsforholdet  $\bar{w}_{to}$  ved

$$\bar{w}_{to} = \frac{A_t}{b_o t \sin \alpha} \quad (4.4)$$

hvor  $A_t$  angiver den enkelte bøjles aktive tværsnitsareal (for en almindelig to-snitsbøjle således 2 gange den enkelte armeringsstangs areal). Når der ses bort fra bøjlernes udstækning vinkelret på bjælkekroppen, er  $\bar{w}_{to}$  ligefrem proportional med mængden af forskydningsarmering i forskydningsfaget.

Regnes bøjlernes areal jævnt fordelt, og er spændingen  $\sigma_t$  i bøjlerne ens, findes af ligningerne (4.1) til (4.4)

$$0 = N_a + \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z \sin \alpha \cos \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) - N_b \quad (4.5)$$

$$T_t = \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (4.6)$$

$$M_B = N_a z + T_a z \cot \theta + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z^2 \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)^2 \quad (4.7)$$

Hvis forskydningskraften  $T$  er konstant, findes  $N_a$  i snit A-A udtrykt ved momentet  $M_A$  i samme snit af (4.6) og (4.7), idet

$$M_A = M_B - Tz \cot \theta \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{M_A}{z} + (T - T_a) \cot \theta - \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)^2 \\ &= \frac{M_A}{z} + T_b \cot \theta + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z \sin^2 \alpha (\cot^2 \theta - \cot^2 \alpha) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Normalt er  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  ( $1 \geq \cot \alpha \geq 0$ ) og  $\theta \leq 45^\circ$  ( $\cot \theta \geq 1$ ), hvilket betyder, at  $N_a$  ikke kan beregnes efter det simple udtryk ( $\frac{M_A}{z}$ ), som anvendes i fag med ren bøjning (se også afsnit 2.2.2). Længdearmeringens trækraft vil også være afhængig af forskydningskraften. Dette forhold må der tages hensyn til, når en længdearmering skal afkortes, f. eks. ved kontinuerlige bjælker, hvor momentkurvens og  $N_a$ 's

nulpunkter ikke vil være sammenfaldende. Ved en simpelt understøtning er det ensbetydende med, at der i længdearmeringen over reaktionen vil være en vis trækraft tilbage, som kræver forankring.

#### 4.3 Brudformer

Betegnelsen forskydningsbrud dækker, ligesom det er tilfældet for bjælker uden forskydningsarmering, en række forskellige brudtyper. Når forskydningsarmeringen består af stænger, hvør den indbyrdes afstand målt langs bjælkeaksen er mindre end  $z$ , og bjælkens forskydningsfag iøvrigt er normalt dimensioneret, vil et forskydningsbrud aldrig være helt uvarslet.

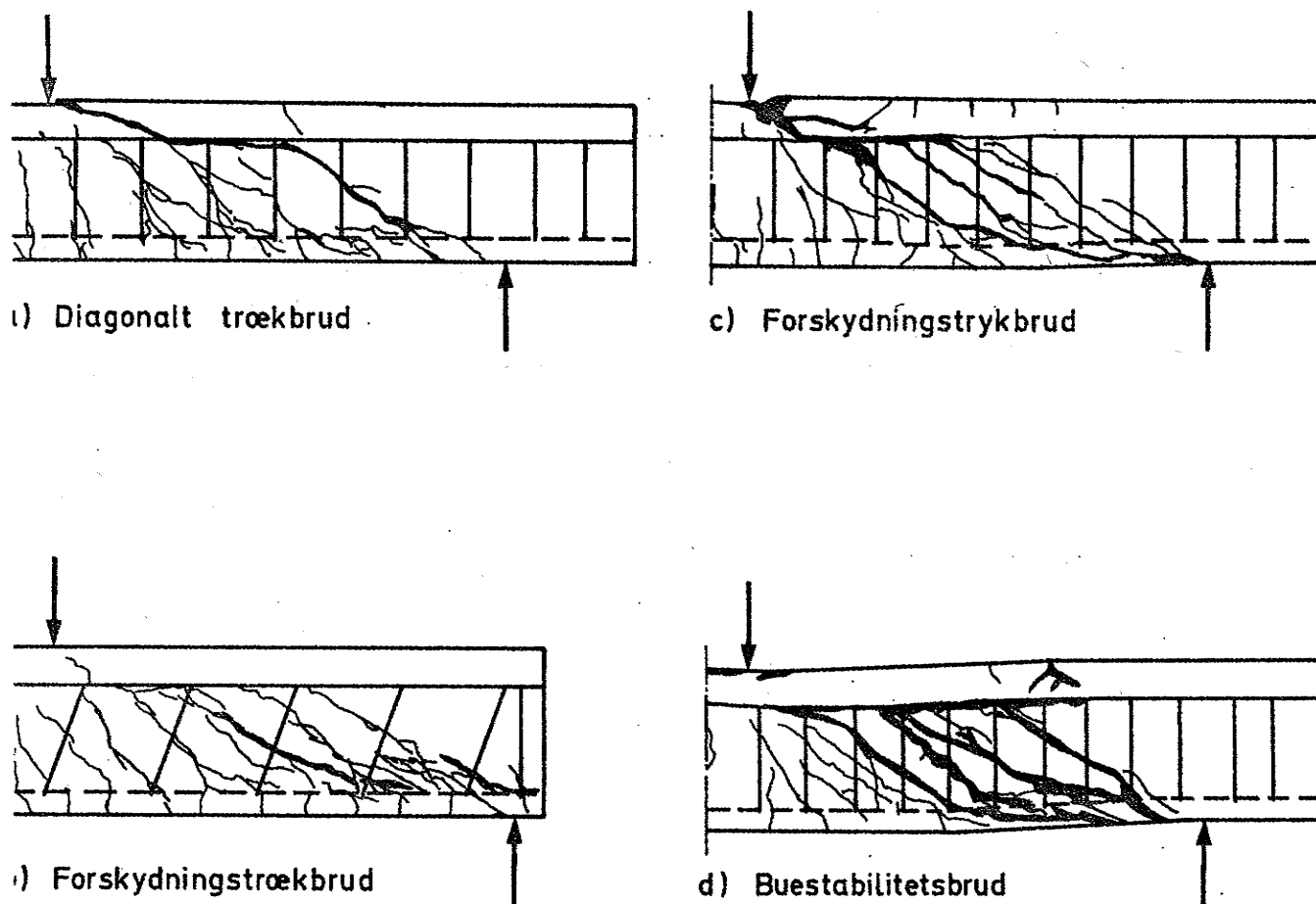


Fig. 4.3 Revnebillede ved forskydningsbrud.

Mens de forskellige brudformer for bjælker uden forskydningsarmering forholdsvis let kan adskilles ved  $\frac{a}{h}$ -forholdet, er dette ikke tilfældet for bjælker med forskydningsarmering. Den væsentligste parameter er her  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$ , hvor  $\sigma_{tf}$  er forskydningsarmeringens flydespænding (eller 0.2-spænding), men en afgrænsning efter bestemte værdier er ikke mulig. På nær kroptrykbrud er brudtyperne de samme, som er nævnt i afsnit 3.3 for bjælker uden forskydningsarmering.

#### 4.3.1 Diagonalt trækbrud

Denne brudform fremkommer hovedsagelig, når forskydningsarmeringen er relativt svag. Efter diagonalrevnens dannelse vil forskydningsarmeringen, der findes i et snit svarende til  $\theta \simeq 45^\circ$ , hurtigt når flydning (eventuelt brud). Herefter åbner revnen sig, dels langs længdearmeringen i et forsøg på at inddrage mere forskydningsarmering, dels mod bjælkens trykzone. Efter spaltning langs længdearmeringen kan diagonalrevnen løbe helt op gennem bjælkens trykzone uden egentlig knusning af denne. Brudbilledet er som vist på fig. 4.3a.

Teoretisk er der mulighed for, at bruddet ved meget lave værdier af  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$  bliver helt uvarslet, svarende til det uvarslede bøjningsbrud i en underarmeret bjælke. Da bøjler normalt ikke anvendes med mindre diameter end ca. 5 mm og afstand  $t$  større end ca.  $z$ , vil det imidlertid i praksis næppe være muligt at opnå en tilstand, der er underarmeret med hensyn til forskydning.

#### 4.3.2 Forskydningstrækbrud

Når diagonalrevner opstår nær understøtningen, er der mulighed for, at der kan foregå en spaltning langs hovedarmeringen på et tidspunkt, hvor bjælkens bæreevne ellers endnu ikke er udtømt. Denne brudform betegnes også forankringsbrud. Faren for et sådant brud er størst ved jævnt fordelt belastning, ved enkeltkræfter nær understøtningen, og hvor bjælken er indirekte understøttet.

Ved laboratorieforsøg forekommer denne brudform sjældent, da bjælken som regel er forsynet med en forholdsvis stor forankringszone bag understøtningen, jfr. afsnit 3.3.4. Brudbilledet er som vist på fig. 4.3b.

Ved forsøg med T-bjælker af Leonhardt og Walther [63.6] fremkommer der forskydningstrækbrud, hvor længdearmeringen kun er ført 6 gange diameteren ud over understøtningen. Ved at anbringe 4 lukkede bøjler omkring hovedarmeringen, som det er vist på fig. 4.4a, blev denne brudform forhindret.

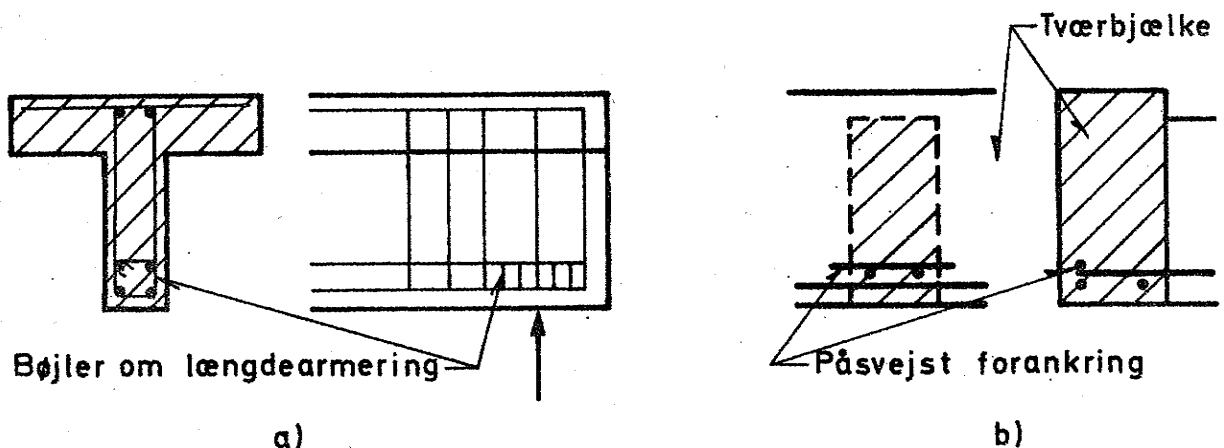


Fig. 4.4 Armeringsarrangement til at forhindre forskydningstrækbrud.

En anden mulighed er at supplere forskydningsarmeringen nær understøtningen med nogle enkelte bøjler, således at der ikke foregår nogen væsentlig åbning af diagonalrevnen. Ligning (4.9) antyder, at anvendelsen af skrå bøjler i denne forbindelse vil være en fordel, idet  $N_a$  derved bliver mindre. Ved forsøg af Leonhardt og Walther [62.10] og Hagberg [67.6] findes således mindre  $N_a$  ved anvendelse af skråbøjler end ved tilsvarende normalbøjler ( $\alpha = 90^\circ$ ). Se endvidere afsnit 4.3.5.



Hvor bjælken er indirekte understøttet ved indstøbning i tværbjælker anbefaler Sigalov og Strongin [62.14] og Hagberg [67.6], at der svejses et stykke armering vinkelret på hovedbjælkens længdearmering, jfr. fig 4.4b. Bøjningstrækræfter i tværbjælkens underside vil her endvidere have en ugunstig indflydelse på optagelsen af  $N_a$ .

Forholdene vedrørende forankringsbrud i forbindelse med diagonalrevner er imidlertid stadig temmeligt uafklarede.

#### 4.3.3 Forskydningstrykbrud

Når der er tilstrækkelig forskydningsarmering til at forhindre spaltning langs hovedarmeringen, vil der kunne opstå forskydningstrykbrud. Denne brudform er allerede udføreligt behandlet i afsnit 3.3.3. Brudbilledet er som vist på fig. 4.3c.

#### 4.3.4 Buestabilitetsbrud

Buestabilitetsbrud fremkommer især i T-bjælker og er ofte kombineret med forskydningstrykbrud. Forholdene er nærmere omfattet i afsnit 3.3.5. Brudbilledet er som vist på fig. 4.3d.

Baker m.f. [69.11] anbefaler, at den forøgede forskydningsstyrke, der som regel findes hos T-bjælker i forhold til rektangulære bjælker, ikke udnyttes. Dette begrundes med faren for buestabilitetsbrud og synes at være på den sikre side, da forsøg viser, at buestabilitetsbrudlasten normalt ikke er meget mindre end forskydningstrykbrudlasten.

#### 4.3.5 Kroptrykbrud

Ved T- og I-bjælker, hvor bjælkekroppen ofte er relativt tynd, er der mulighed for, at der opstår trykbrud i kroppen, før end forskydningsarmeringens bæreevne ellers er opbrugt. Denne brudform sætter en øvre grænse for, hvor kraftigt et tværsnit kan udnyttes. Et skøn over trykket  $\sigma_b$  i bjælkekroppen er opstillet i det følgende.

Et stykke  $\Delta x$  langs længdearmeringen mellem to diagonalrevner betragtes, se fig. 4.5. Kraften i bøjlerne forudsættes at kunne fordeles jævnt langs hovedarmeringen, der samtidig regnes jævnt fordelt over kropbredden  $b_0$ . Betontrykket antages at have samme retning -  $\theta$  - som diagonalrevnerne.

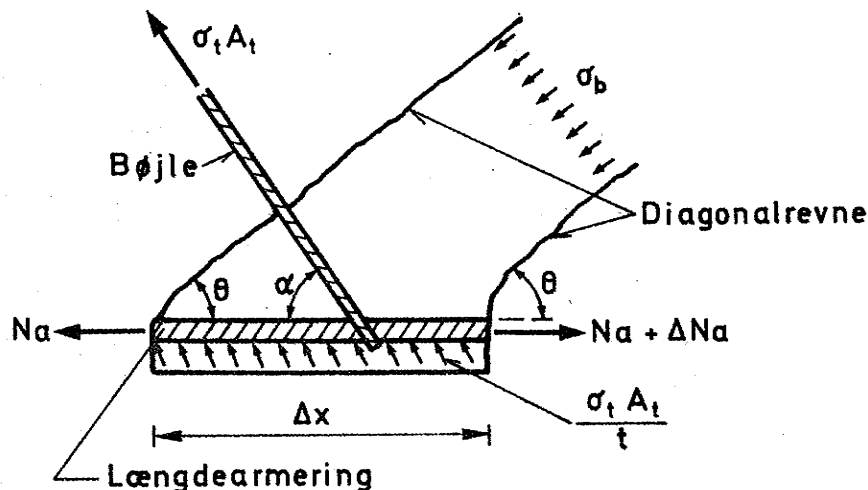


Fig. 4.5 Spændingsforhold i bjælkekrop ved kroptrykbrud.

Ved projektion vinkelret på bjælkeaksen findes

$$\frac{\sigma_t A_t}{t} \sin \alpha \Delta x = \sigma_b b_0 \sin \theta \sin \theta \Delta x \quad (4.10)$$

Udtrykt ved  $\bar{m}_{to}$  haves

$$\sigma_b = \bar{m}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (1 + \cot^2 \theta) \quad (4.11)$$

Hvis  $\theta$  regnes uafhængig af  $\alpha$ , fremgår det af (4.11), at bøjler med  $\alpha = 90^\circ$  vil give et dobbelt så stort tryk i bjælkekroppen som bøjler med  $\alpha = 45^\circ$ .

Denne virkning af skråbøjler i forhold til bøjler vinkelret på bjælkeaksen ved store værdier af  $\bar{m}_{to} \sigma_{tf}$  er også fundet ved forsøg af bl.a. Leonhardt og Walther [62.10] og Hagberg [67.6].

Anvendes projektion i bjælkeaksens retning, findes af fig. 4.5

$$N_a + \frac{\sigma_t A_t}{t} \cos \alpha \Delta x + \sigma_b b_o \sin \theta \cos \theta \Delta x = N_a + \Delta N_a \quad (4.12)$$

Indsættes  $\sigma_b$  fra (4.11) findes

$$\frac{1}{b_o} \frac{\Delta N_a}{\Delta x} = \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) = \frac{T_t}{b_o z} \quad (4.13)$$

Idet  $T_t$  er indsat fra (4.6).  $\frac{T_t}{b_o z}$  er således et udtryk for forskydningsspændingen i betonen på strækningen  $\Delta x$ .

Ved anvendelse af opbøjet længdearmering (skråjern) som forskydningsarmering, er der mulighed for en speciel form for brud i bjælkekroppen. Dette skyldes, at der er fare for et partielt spaltebrud i betonen, hvor en hårdt belastet armeringsstang bukket op i bjælken. Forholdene ved anvendelse af skråjern er nærmere behandlet i afsnit 4.4.2.

#### 4.4 Væsentlige parametre

De væsentligste faktorer, der foruden forskydningsarmeringen har betydning for bjælkens forskydningsbrudlast  $\tau_u$ , er betonens træk- og trykstyrke, længdearmeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$  og  $\frac{M}{Th}$ -forholdet ( $\frac{a}{h}$ ). Endvidere har længdearmeringens flydespænding indirekte en vis indflydelse, idet det ved en dimensionering af forskydningsarmeringen normalt tilstræbes, at et eventuelt brud vil være et bøjningsbrud.

Forskydningsbæreevnen er - jfr. ligning (4.2a) - bestemt af to grupper parametre. Dels forskydningsarmeringens bidrag udtrykt ved  $\bar{w}_{to}$ ,  $\sigma_{tf}$ ,  $\theta$  og  $\alpha$ , dels af dornvirkningen plus betontrykzonens bidrag.  $T_a + T_b$  er imidlertid ikke uafhængig af forskydningsarmeringen. Dette skyldes, at diagonalrevnens hældning  $\theta$  har indflydelse på størrelsen af  $T_a + T_b$ , idet forsøg af f.eks. Leonhardt, CEB [64.13] viser, at af-tagende  $\bar{w}_{to}$  og  $\sigma_{tf}$  medfører fladere revner. Endvidere vil dornvirkningen som tidligere nævnt afhænge af tilstedeværelsen af bøjler bag diagonalrevnen. Problemet er derfor komplekst, og de to parametergrupper kan næppe adskilles fuldstændigt.

I de følgende afsnit omtales de vigtigste parametre, der har indflydelse på forskydningsbrudlasten for simpelt understøttede, punktbelastede bjælker. Herudfra vil forholdene for andre understøtnings- og belastningstyper blive behandlet.

#### 4.4.1 Bøjler som forskydningsarmering

Den almindeligste form for forskydningsarmering er bøjler, der har en hældning  $\alpha$  med bjælkeaksen, hvor  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Forudsætningen for, at bøjlerne kan regnes effektive, er en korrekt konstruktiv udformning, hvor det især er af betydning, at bøjlerne er tilstrækkeligt forankret i bjælkens trykzone, og at de omslutter længdearmeringen. Disse forhold er udførligt behandlet af bl.a. Leonhardt i [65.8].

Bøjlernes bidrag til forskydningsoptagelsen fremgår af (4.6). Spændingen  $\sigma_t$  i bøjlerne kan ved forskydningsbrud sættes lig flydespændingen  $\sigma_{tf}$ , når der ikke er fare for kropstrykbrud. Dette er konstateret af mange forskere, således af Leonhardt og Walther [62.10], Hagberg [67.6], Özden [67.19] og forfatteren [70.1]. Ved alle disse forsøg er der anvendt bøjler, hvor flydespændingen højst har været ca.  $4500 \text{ kp/cm}^2$ . Forholdene ved anvendelse af bøjler med højere flydespænding er endnu ikke undersøgt nøjere. Udnyttelsen af den høje flydespænding kræver relativt store tøjninger. Dette kan, som det allerede er nævnt i afsnit 4.3, medføre fare for kropstrykbrud, inden flydning er nået i bøjlerne.

Betydningen af bøjlernes hældningsvinkel ved kropstrykbrud er allerede behandlet i afsnit 4.3. Af ligning (4.11) fremgår det således, at skråbøjler giver aftagende tryk i bjælkekroppen, når  $\alpha$  aftager. Når der ikke er fare for denne brudform, er det noget mere usikkert, hvilken bøjletype der er mest effektiv.

Betragtes ligning (4.6), ses det, at når  $\bar{w}_t \sigma_t$  er konstant, vil bøjlernes bidrag til forskydningsbæreevnen afhænge af størrelsen  $K$ , hvor

$$K = \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) \quad (4.14)$$

For konstant  $\theta$  har  $K$  maksimum for  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot (\pi - \theta)$  (se f.eks. Richart [27.1]) eller Appendix B. Det fremgår heraf, at det største bidrag til bøjlernes forskydningsoptagelse ikke opnås, som det måske umiddelbart kunne forventes, når forskydningsarmeringen placeres vinkelret på diagonalrevnen, men ved en afvigelse i lodret retning herfra på  $\frac{1}{2}\theta$ .

Ved forsøg, hvor diagonalrevnens åbning måles i forskellige retninger, finder Leonhardt og Walther [63.6] 2 til 3 gange så store flytninger vinkelret på bjælkeaksen som parallel hermed. Dette antyder, at normalbøjler ( $\alpha = 90^\circ$ ) vil være mere effektive end skrå bøjler med  $\alpha = 45^\circ$ . Forsøg antyder imidlertid, at der er en tendens til fladere diagonalrevner for aftagende værdier af  $\alpha$ , hvilket komplicerer mulighederne for teoretisk at afgøre  $\alpha$ 's indflydelse.

Der findes kun få forsøg til belysning af bøjlevinklens betydning. Leonhardt og Walther [62.9] finder ved 4 forsøg med rektangulære bjælker, hvor  $\bar{\omega}_{to} \sigma_{tf}$  to og to er ens, at bjælkerne med normalbøjler får bøjningsbrud, mens de tilsvarende bjælker med bøjler under  $45^\circ$  får forskydningsbrud ved indtil 10% lavere last.

Moretto [45.2] finder ligesom Richart [27.1] samme forskydningsbrudlast for bjælker med normalbøjler som for bjælker med bøjler, hvor  $\alpha = 45^\circ$ . Moretto finder endvidere 10-15% højere brudlast for bjælker med bøjler, hvor  $\alpha = 67\frac{1}{2}^\circ$ . Morettos forsøg må imidlertid tages med forbehold, da bøjlerne er svejst til længdearmeringen og  $\frac{a}{h} \simeq 1,5$ .

Wilby [51.2] angiver, at bjælker med skråbøjler ( $\alpha = 45^\circ$ ) giver 5-15% højere brudlast end bjælker med normalbøjler. Bjælkernes brudform fremgår imidlertid ikke af [51.2].

Af ovenstående fremgår det, at der stadig savnes forsøg med skråbøjler, hvor  $\bar{\omega}_{to} \sigma_{tf}$  er så lav, at der ikke er fare for kroptrykbrud. I Appendix B findes en undersøgelse af bøjlelehældningen  $\alpha$ 's indflydelse for de i afsnit 4.5 omtalte beregningsformler.

Når bøjleafstanden  $t$  bliver større end ca.  $\frac{3}{4}z$ , vil forskydningsbrudlasten for fastholdt  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$  blive væsentlig mindre end for bjælker med mindre bøjleafstand. Dette skyldes, at diagonalrevnen i dette tilfælde højst vil krydse to bøjler, muligvis slet ingen.

For bøjleafstande  $t$  i området  $\frac{1}{2}z < t < \frac{3}{4}z$  viser forsøg af Sunderland [49.1] (refereret af Sjøpler [67.18]) og af forfatteren [70.1], at der for fastholdt  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$  sker en svag stigning af forskydningsbrudlasten for aftagende  $t$ . For  $t < \frac{1}{2}z$  er bøjleafstanden uden betydning for forskydningsbæreevnen, når  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$  er konstant.

I de senere år er der bl.a. i Tyskland fremkommet en anden type bøjlearmering udformet som svejste armeringsnet. Leonhardts forsøg [65.9] viser, at denne form for bøjlearmering kan ligestilles med traditionelle bøjler, når der er påsvejst tilstrækkelig langsgående armering til sikring af bøjlernes forankring.

#### 4.4.2 Opbøjet længdearmering som forskydningsarmering (skråjern)

Især i forbindelse med kontinuerlige bjælker, hvor der ved mellemunderstøtninger er brug for bøjningsarmering i bjælkens overside, anvendes ofte opbøjet længdearmering - såkaldte skråjern - som forskydningsarmering.

Anvendelse af denne type forskydningsarmering er imidlertid forbundet med visse ulemper. Således viser forsøg af bl.a. Leonhardt og Walther [63.6] og Özden [67.19], at der som tidligere beskrevet opstår betydelige trykspændinger i betonen ved armeringsstængernes opbøjningspunkter. Dette tryk vil kunne medføre for tidlig revnedannelse. Endvidere øges faren for et partielt spaltebrud. Ovennævnte forsøg viser, at kroptrykbrud kan forhindres ved at indlægge en ekstra bøjlearmering ved opbøjningsstedet.

Når længdearmeringen skal opbøjes, må dette naturligvis ikke foregå, før længdearmeringen kan undværes som bøjningsarmering. I denne forbindelse må der tages hensyn til

den forøgelse af længdearmeringens trækraft, der foregår som følge af diagonalrevnens tilstedeværelse, jfr. afsnit 4.2 om kraftomlejringen.

Hvis længdearmeringen opbøjes for tidligt - f.eks. svarende til, at trækraften beregnes, som det findes ved ren bøjning ( $\frac{M}{Z}$ ) - fås en betydelig reduktion af brudlasten, hvilket bl.a. er fundet ved forsøg af Ferguson og Matloob [59.1] og Leonhardt og Walther [62.9].

Hvis opbøjet armering anvendes som forskydningsarmering, kan dens bidrag til forskydningsstyrken beregnes af (4.2b), altså et bidrag  $\Delta T = A_t \sigma_t \sin \alpha$ . Spørgsmålet er imidlertid, hvor stor en spænding  $\sigma_t$ , der må regnes med. Følgende tilnærmede betragtninger om spændingstilstanden ved opbøjningsstedet kan give et indtryk heraf.

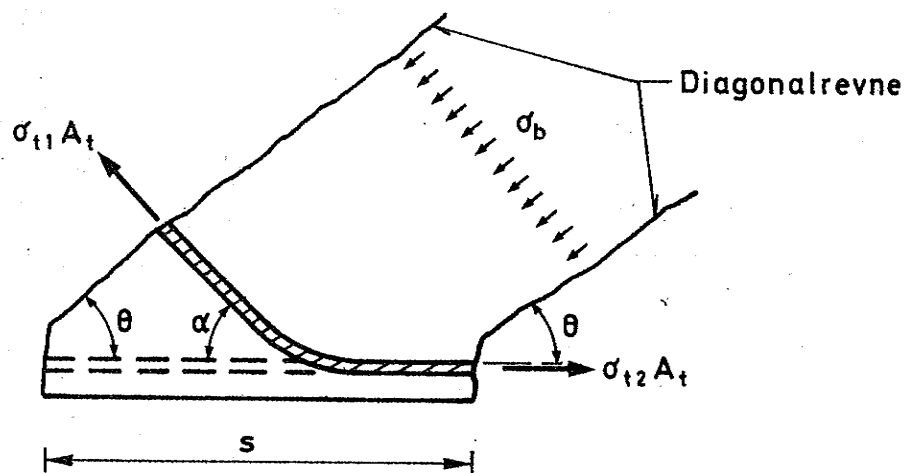


Fig. 4.6 Spændingsforhold ved opbøjet længdearmering.

Når betonen regnes revnet under en vinkel  $\theta$  med bjælkeaksen, betontrykket  $\sigma_b$  regnes jævnt fordelt over bjælkebredden, og der ses bort fra forskydende spændinger langs armeringen - findes ved projektlionsligningerne udtrykkene

$$\sigma_{t1} A_t \cos \alpha + \sigma_b b_o s \sin \theta \cos \theta = \sigma_{t2} A_t \quad (4.15)$$

$$\sigma_{t1} A_t \sin \alpha - \sigma_b b_o s \sin^2 \theta = 0 \quad (4.16)$$

hvor betegnelserne fremgår af fig. 4.6. Heraf findes

$$\sigma_{t1} = \frac{\sigma_{t2}}{\sin \alpha (\cot \alpha + \cot \theta)} \quad (4.17)$$

Ved forsøg, hvor hovedarmeringen er opbøjet ( $\alpha = 45^\circ$ ), - f.eks. Leonhardt og Walther [63.6] og Özden [67.19], - findes, at diagonalrevnevinklen  $\theta$  ved forskydningsbrud er ca.

$45^\circ$ . Indsættes  $\theta = 45^\circ$  og  $\alpha = 45^\circ$  i (4.17) findes  $\sigma_{t1} = \frac{\sigma_{t2}}{\sqrt{2}}$ , hvor  $\sigma_{t2}$  maksimalt må regnes lig flydespændingen. Denne reduktion af den opbøjede armerings evne til forskydningsoptagelse er første gang påpeget af Johansen [28.1] og senere [45.1] og [56.2].

Den formindskede spænding i opbøjet armering er i overensstemmelse med forsøg af Özden [67.19], hvor armeringens tøjninger blev målt på begge sider af opbøjningsstedet.

Ovennævnte betragtninger gælder nær opbøjningsstedet.  $\sigma_{t1}$  beregnet efter (4.17) er imidlertid også den højeste spænding, der må regnes med, hvor en diagonalrevne krydser armeringsstangen højere oppe i bjælken. Hvis spændingen i armeringsstangen var større længere oppe, ville dette medføre, at der skulle overføres forskydende spændinger mellem armering og beton på den mellemliggende strækning, hvilket næppe vil være muligt.

Hvis bjælkens forskydningsarmering udelukkende består af opbøjet længdearmering med afstanden  $t$  målt langs bjælkeaksen, findes ved at indsætte  $\sigma_t = \sigma_{t1}$  fra (4.17) i (4.6) idet  $\sigma_{t2} = \sigma_{tf}$

$$T_t = \sigma_{tf} A_t \frac{z}{t} \quad (4.17a)$$

Det fremgår heraf, at den opbøjede længdearmerings forskydningsoptagelse er uafhængig af diagonalrevnevinklen  $\theta$  og armeringens opbøjningsvinkel  $\alpha$ .

Iflg. både de amerikanske normer [62.1] og [70.5], udkast til de engelske normer [69.11] og CEB-FIP's nyeste normer [69.16] er det til trods herfor tilladt at indsætte den fulde værdi af den opbøjede armeringsstangs flydespænding  $\sigma_{tf}$



ved beregning af bjælkens forskydningsstyrke. Ved anvendelse af (4.6), hvor  $\sigma_t = \sigma_{tf}$ , i stedet for (4.17a) overvurderes forskydningsbæreevnen således ca. 40%, når  $\alpha = \theta = 45^\circ$ .

Af ovenstående fremgår det, at anvendelse af opbøjet armering som forskydningsarmering er forbundet med betydelig fare for kraftig revnedannelse. Hvis skråjern alligevel medregnes ved forskydningsoptagelsen, må det derfor kræves, at der ved opbøjningsstedet suppleres med en bøjlearmering, der kan forhindre et partielt spaltebrud.

#### 4.4.3 Forskydningsarmering i bjælkeaksens retning

Anvendelse af vandret forskydningsarmering placeret i bjælkekroppen er kun undersøgt af nogle enkelte forskere: Taub [55.2], Walther [56.3] og Leonhardt og Walther [63.6]. Resultaterne af disse forsøg er imidlertid modstridende, og der kan ikke uddrages nogen endelig konklusion.

Virkningen af en sådan armering vil være en begrænsning af diagonalrevnens udbredelse mod trykzonen, en fordeling af revnerne og eventuelt en aflastning af trækarmeringen. Da en vandret armering derimod ikke kan forhindre en spaltning langs længdearmeringen, er det ikke muligt at undvære en bøjlearmering. Et muligt anvendelsesområde for en vandret forskydningsarmering er derfor ved meget kraftigt påvirkede tværsnit, hvor den tætliggende bøjlearmering kan give problemer i forbindelse med betonens udstøbning. Det er imidlertid nødvendigt med flere forsøg for at kunne vurdere effektiviteten af en sådan langsgående forskydningsarmering.

#### 4.4.4 Dornvirkningens og betontrykzonens bidrag

Når forskydningsarmeringen har nået flydning, vil bjælkens resterende bæreevne tilnærmet kunne beregnes, som for bjælker uden forskydningsarmering. På grundlag af hvad der er fundet for forskydningstrykbrudlasten i afsnit 3.5, er det da muligt at danne sig et indtryk af indflydelsen af de tre hovedparametre: betonstyrken, længdearmeringsforholdet og  $\frac{M}{Th}$ -forholdet. Generelt kan det siges, at variationer af

disse parametre giver et relativt lille udslag i bjælkens samlede forskydningsstyrke på grund af overlejringen fra forskydningsarmeringen.

Indflydelsen fra betonens tryk- og trækstyrke kan med god tilnærmelse udtrykkes ved  $\sigma_c$  i en passende potens. Længdearmeringens bidrag kan tilsvarende udtrykkes ved  $\bar{w}_{ao}$ . Når længdearmeringen afkortes i træksiden eller opbøjjes som skråjern, og denne afkortning er i overensstemmelse med kraftomlejringen, vil det være rimeligt at indsatte det reducerede armeringsareal ved beregning af  $\bar{w}_{ao}$ . Dette medfører en lidt mindre styrke for bjælker med afkortet længdearmering i forhold til styrken for bjælker med gennemgående armering, hvilket er i overensstemmelse med forsøg af Bresler og Scordelis [64.2], Taylor [66.11] og Rathkjen [68.6].

Størst afvigelse fra forholdene ved bjælker uden forskydningsarmering findes for  $\frac{M}{Th}$ -forholdets indflydelse. Ved bøjlearmerede bjælker må der opdeles i to bidrag. Dels et, hvor diagonalrevnens vandrette projektion erstatter forskydnings-spændvidden  $a$ . Dette svarer til, at bøjlerne bag diagonalrevnen har samme indflydelse på dornvirkningen, som understøtningsreaktionen har for bjælker uden bøjler. Dels har  $\frac{M}{Th}$ -forholdet direkte indflydelse på betontrykzonens mulighed for at optage forskydende spændinger, idet diagonalrevnen for samme  $T$  vil nå højere op i bjælken ved store værdier af  $\frac{M}{Th}$  end ved små værdier.

Tilnærmet kan disse faktorerers indflydelse udtrykkes ved et potensudtryk af formen

$$\frac{T_a + T_b}{b_o z} = c_1 (\sigma_c)^{\beta_1} (\bar{w}_{ao})^{\beta_2} \left(\frac{Th}{M}\right)^{\beta_3} \tan \gamma_\theta \quad (4.18)$$

hvor  $c_1$  er en konstant. Potenserne  $\beta_1$  vil (jfr. afsnit 3.5) have værdier, der er afgrænsede af ulighederne  $0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{2}$ , mens  $\gamma$  vil være nær 1.

Ovennævnte betragtninger gælder, hvor der ikke er fare for kroptrykbrud. Ved denne brudform er det betonens trykstyrke, der har den afgørende indflydelse for forskydnings-

brudlasten, jfr. den begrænsning af  $\sigma_t$ , der foregår ved anvendelse af ligning (4.11), når  $\sigma_b$  sættes lig betonens trykbrudspænding.

#### 4.4.5 Belastnings- og understøtningsform

Forsøg med jævnt fordelt belastning udført af bl.a. Rüsch m.f. [62.13] og Leonhardt og Walther [62.9] viser, at denne belastningsform, ligesom det er nævnt i afsnit 2 og 3, er gunstigere med hensyn til optagelse af forskydningskræfter end en punktbelastning. Dette gælder, når faren for forskydningstrækbrud er forhindret, f.eks. ved anvendelse af skråbøjler, (jfr. afsnit 4.3.2).

Når bjælken er direkte understøttet, er det ved jævnt fordelt belastning ikke nødvendigt at dimensionere bøjlerne for den maksimale forskydningskraft. Dette skyldes, at diagonalrevnen dannes nær understøtningen, og det er forskydningskraften i et normalsnit ved revnens øvre endepunkt i en afstand ca.  $h$  fra understøtningen, der er dimensionsgivende. Bøjlerne skal imidlertid for at begrænse diagonalrevnens udbredelse placeres helt ind til understøtningen.

For bjælker indstøbt i en tværbjælke kan det være nødvendigt at anvende mere forskydningsarmering nær bjælkeenden, end hvad der er tilstrækkeligt for direkte understøttede bjælker. Bøjningstrækrevner i tværbjælken vil her som allerede tidligere nævnt virke til ugunst for forskydningsoptagelsen i hovedbjælken. En ekstra længdearmering i tværbjælken vil delvis kunne afhjælpe dette forhold. Imidlertid savnes der forsøg til belysning af disse problemer.

Forholdene ved indirekte understøtning er allerede kort omtalt ovenfor og i afsnit 4.3.2. For punktbelastede bjælker viser forsøg af Hagberg [67.6] og Leonhardt m.f. [68.5] tilfredsstillende styrke i sammenligning med tilsvarende direkte understøttede bjælker.

Forsøg med indirekte belastningsoverførsel gennem indstøbte tværbjælker - Leonhardt m.f. [68.5] og Baumann og

Rüsch [70.2] - viser, at der skal placeres supplerende bøjler ved ophængningspunktet. Denne forskydningsarmering skal dimensioneres for 80-100% af den overførte belastning. Der savnes imidlertid flere forsøg til belysning af disse forhold.

Forsøg med gentagende belastninger udført af Taylor [64.9] antyder, at forskydningsstyrken ikke formindskes, når belastningen er mindre end brugslasten. Forsøg af Mayer [67.11] viser, at der ved gentagende belastning ud over diagonalrevnelasten kan foregå en fordobling af bøjlespændingerne og dermed en reduktion af forskydningsbæreevnen. Yderligere forsøg til belysning heraf savnes imidlertid.

Ved kontinuerlige bjælker viser forsøg af Rodriquez m.f. [59.3], Bryant m.f. [62.5], Hognestad m.f. [63.5] og Kupfer [67.9], at disse har samme styrke som tilsvarende simpelt understøttede bjælker. Længdearmeringen kan afkortes efter momentnulpunktet, når der blot tages hensyn til, at den først kan regnes spændingsløs i en afstand af ca.  $h$  herefter (jfr. afsnit 4.2). Ved afkortningsstedet bør der anbringes supplerende bøjler, der kan begrænse åbningen af eventuelle langsgående revner, således at hovedarmeringen kan opnå fuld forankring. I forbindelse med afkortning af længdearmering henleder Leonhardt m.f. [68.5] opmærksomheden på, at adhæsionen i bjælkens overside, bl.a. som følge af dannelsen af luftlommer under disse armeringsstænger, er betydelig dårligere end i undersiden. Leonhardt anbefaler således en fordobling af forankringslængden i bjælkens overside.

#### 4.5 Beregningsformler

Ved opstilling af en beregningsformel til dimensionering af forskydningsarmering er et af de største problemer fastlæggelsen af kompatibilitetsbetingelserne. Der findes ligesom for bjælker uden forskydningsarmering endnu ingen tilfredsstillende opstilling af disse betingelser, og de må derfor erstattes af empiriske ligninger.

De statiske betingelser er allerede behandlet i afsnit 4.2 under kraftomlejringen.

De fysiske betingelser er for bøjlerne vedkommende behandlet i afsnit 4.4.1 og for trækarmingen i afsnit 4.4.3. For betonen anvendes i nogle tilfælde et kompliceret brudkriterium for den kombinerede spændingstilstand i betontrykzonen. Dette synes ikke retfærdiggjort, så længe trykzonens størrelse fastlægges gennem empiriske kompatibilitetsbetingelser, og spændingsforholdene i trykzonen ydermere er ukendte. Som brudbetingelse synes det derfor rimeligt at vælge en maksimal tøjning på f.eks. 3,5 o/oo svarende til en maksimal betontrykbrudspænding lig cylinderstyrken  $\sigma_c$ . I tilfælde, hvor der er fare for kloptrykbrud, vil betonens cylinderstyrke sætte en øvre grænse for betontrykspændingen  $\sigma_b$  i bjælkekroppen, jfr. afsnit 4.3.3.

I de følgende afsnit vil der blive omtalt nogle typiske beregningsformler til bestemmelse af bjælkens forskydningsbrudlast, når forskydningsarmingen består af bøjler. I afsnit 4.5.5 er foretaget en sammenligning mellem nogle af disse formler, når forskydningsarmingen består af normalbøjler.

I Appendix B er nogle af de omtalte beregningsformler udvidet til også at omfatte skråbøjler, og der er foretaget en undersøgelse af bøjlehældningens indflydelse på den teoretiske brudlast.

#### 4.5.1 Modificeret Gitteranalogi

Den beregningsformel, der i de sidste 50-60 år i de fleste europæiske lande har været lagt til grund for beregning af forskydningsbæreevnen, betegnes Gitteranalogien. Metoden er opstillet af Ritter [1899.1] og Mörsch [12.1] omkring århundredskiftet. Betonbjælken sammenlignes med en Gitterdrager med parallelle flanger, hvor bøjlerne udgør vertikalerne og betonen trykdiagonalerne. Forskydningsbæreevnen  $T_u$  kan beregnes af (4.6), idet  $T_a + T_b$  regnes lig 0,  $\theta$  regnes lig  $45^\circ$  og  $\sigma_t = \sigma_{tf}$

$$T_u = \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) b_o z$$

For små værdier af  $\frac{T_u}{b_o z}$  regnes betonen selv at kunne optage hele

forskydningskraften, idet betonen her også udgør gitterets vertikaler. Denne grænseværdi angives normalt som betonens trækstyrke svarende til, at der opstår trækbrud i vertikalerne. Trækstyrken ses oftest angivet som en vis brøkdel af betonens enaksede trykstyrke. Beregningsmetoden er baseret på princippet om tilladelige spændinger.

Ved undersøgelse af en bjælkes forskydningsbrudlast viser forsøg, som allerede nævnt i afsnit 4.4.4, at den lodrette kraftkomponent i betontrykzonen samt hovedarmeringens dornvirkning optager en ikke ubetydelig del af forskydningspåvirkningen. Dette medfører, at en beregning efter Gitteranalogien giver en betydelig variation i bjælkens totale sikkerhed og en brudværdi, der altid er meget på den sikre side. Forsøg viser, at  $(T_a + T_b)$ -bidraget er større end bjælkens diagonalrevnelast  $T_{cr}$ , når diagonalrevnens hældning regnes lig  $45^\circ$ . Sammenholdes ovenstående med (4.2a) kan forskydningsbrudlasten  $T_u$  på den sikre side beregnes ved

$$T_u = T_{cr} + \bar{m}_{to} \sigma_{tf} \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) b_o z \quad (4.20)$$

Dette udtryk for forskydningsbrudlasten forudsætter, at bøjlerne når flydning, og der således ikke opstår kroptrykbrud inden.

Ligning (4.20) ligger til grund for en lang række beregningsformler, hvor den største variation fremkommer som følge af forskellige udtryk for diagonalrevnelasten. Endvidere kan der forekomme afvigelser på grund af forskellig beregning af  $z$ . Når  $z$  ikke regnes som en bestemt brøkdel af bjælkehøjden opnås den fordel, at der tages hensyn til, at T- og I-bjælker har en lidt højere forskydningsbrudlast end tilsvarende rektangulære bjælker. Ovennævnte beregningsmetode benævnes ofte den Modificerede Gitteranalogi, svarende til at gitterets trykflange har en vis hældning i forhold til bjælkeaksen.

På grundlag af det i afsnit 2.3.1 anførte udtryk for diagonalrevnelasten finder Viest (ACI-ASCE) følgende udtryk for forskydningsbrudlasten  $\tau_u$ , idet  $z$  regnes lig nyttehøjden  $h$

$$\tau_u = \frac{T_u}{b_o h} = \tau_{cr} + \bar{m}_{to} \sigma_{tf} \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha) \quad (4.21)$$

hvor  $\tau_{cr}$  beregnes efter (2.23), og hvor bøjlernes flydespænding  $\sigma_{tf}$  ikke må regnes højere end  $4200 \text{ kp/cm}^2$ . Af hensyn til faren for kroptrykbrud må  $\tau_u$  ikke regnes højere end  $2,12\sqrt{\sigma_c}$  ( $\sigma_c$  i  $\text{kp/cm}^2$ ) for rektangulære bjælker med normalbøjler og  $2,65\sqrt{\sigma_c}$  for rektangulære bjælker med skråbøjler samt for T-bjælker.\*

Regan [68.10] angiver for 113 simpelt understøttede, punktblastede rektangulære bjælker med normalbøjler, at beregnet ( $\tau_u$ )/målt ( $\tau_u$ ) for (4.21) er 0,79, og at variationskoefficienten er 17%.

Andre forfattere, bl.a. Leonhardt [65.7], Bachmann og Thürlimann [66.1] og Brøndum-Nielsen [69.13] regner med et simplere udtryk for  $T_{cr}$ , hvor kun betonens træk- eller trykstyrke indgår. Således regner Leonhardt for simpelt understøttede bjælker med

$$\tau'_{cr} = \frac{T_{cr}}{b_o z} = \frac{1}{20} \sigma_T \quad (4.22)$$

hvor  $\sigma_T$  angiver betonens terningstyrke. Afhængig af bøjlevinklen  $\alpha$  angiver Leonhardt grænsen for kroptrykbrud til

$$\frac{T}{b_o z} \leq \begin{cases} 0,14 \sigma_T & \text{for } 90^\circ \geq \alpha > 55^\circ \\ 0,18 \sigma_T & \text{for } 55^\circ \geq \alpha \geq 45^\circ \end{cases} \quad (4.23)$$

#### 4.5.2 Gvozdev, Hillerborg

Gvozdev, refereret af Sigalov og Strongin [62.14], angiver en metode til beregning af en bjælkes bøjlearmering, hvor der tages hensyn til, at bøjlerne har indflydelse på  $T_b$ -bidragets størrelse.  $T_a$  regnes her lig med nul. På grundlag af forsøg (refereret i CEB [65.13]) findes, at  $T_b$  er omvendt proportional med længden af diagonalrevnens projektion på vandret  $c = z \cot \theta$  (se fig. 4.2). Dette svarer til, at potensen  $\gamma$  i (4.18) sættes lig 1. Når  $z$  regnes lig  $h$ , findes forskydningsbæreevnen  $\tau$  af (4.2a) og (4.6), idet kun bøjler vinkelret på bjælkeaksen ( $\alpha = 90^\circ$ ) betragtes

\* Se fodnote afsnit 2.3.1.

$$\tau = \frac{T}{b_0 h} = \kappa \tan \theta + \bar{w}_{t0} \sigma_t \cot \theta \quad (4.24)$$

hvor  $\sigma_t$  regnes lig bøjlernes flydespænding  $\sigma_{tf}$ .

Grozdev angiver følgende udtryk for  $\kappa$

$$\kappa = 0,15 \sigma_{bu} \quad (4.25)$$

hvor  $\sigma_{bu}$  (jfr. Sigalov og Strongin) kan regnes lig 1.25 gange betonens cylinderstyrke  $\sigma_c$ . Forsøgsresultater til underbygning af (4.25) og første led i (4.24) er på fig. 4.7 afbildet efter CEB [65.13]. Det ses heraf, af den valgte værdi af  $\kappa$  (4.25) ligger i underkanten af forsøgsresultaterne.

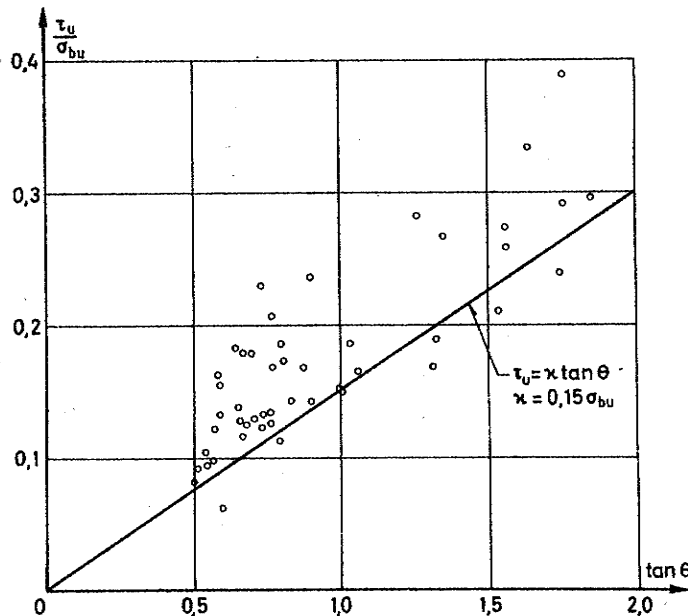


Fig. 4.7 Eftervisning af forskydningsbrudlastens afhængighed af diagonalrevnevinklens hældning. (Efter CEB[65.13] p.46).

Betragtes  $\tau$  i (4.24) som funktion af  $\cot \theta$ , ses det, at  $\tau$  har et minimum. Denne minimumsværdi af  $\tau$  findes på sædvanlig måde

$$\frac{\partial \tau}{\partial \cot \theta} = -\kappa \tan^2 \theta + \bar{w}_{t0} \sigma_t = 0 \quad (4.26)$$

hvoraf den diagonalrevnevinkel  $\theta_m$ , der giver mindst  $\tau$ , findes af



$$\cot \theta_m = \sqrt{\frac{\kappa}{\bar{\omega}_{to} \sigma_t}} \quad (4.27)$$

Når forskydningsarmeringen dimensioneres, således at bøjningsbrud er tilstræbt, vil (4.27) normalt give værdier af  $\theta_m$  mindre end  $45^\circ$ , hvilket svarer til erfaringen fra forskydningsforsøg, hvor diagonalrevnevinklen ved brud normalt er mellem ca.  $20^\circ$  og  $40^\circ$ .

(4.27) er iøvrigt også i overensstemmelse med de tidligere nævnte forhold, at aftagende  $\bar{\omega}_{to} \sigma_t$  giver mindre resulterende diagonalrevnevinkel.

Indsættes (4.27) i (4.24) findes minimumsværdien  $\tau_m$

$$\tau_m = \min \left[ \frac{T}{b_o h} \right] = 2 \sqrt{\kappa \bar{\omega}_{to} \sigma_t} \quad (4.28)$$

Det er ikke sikkert, at bjælken i praksis ved forskydningsbrud vil indstille sig, svarende til diagonalrevnevinklen  $\theta_m$ . Rent teoretisk skulle dette imidlertid blot betyde, at brudlasten blev større end, hvad der findes efter (4.28). I tilfælde, hvor (4.27) giver værdier af  $\cot \theta_m > \frac{a}{h}$ , indsættes i stedet  $\cot \theta = \frac{a}{h}$  i (4.24), hvorved der tages hensyn til den lidt højere forskydningsstyrke hos bjælker med relativt små  $\frac{a}{h}$ -forhold.

Gvozdev angiver ingen begrænsning af  $\tau_m$  med hensyn til faren for kroptrykbrud.

I CEB [65.13] angiver Gvozdev, at der kan tages hensyn til, at forskydningsstyrken aftager for voksende bøjleleafstand (jfr. afsnit 4.4.1), ved at bidraget fra en bøjle subtraheres fra (4.24). Dette ændrer ikke udtrykket for  $\cot \theta_m$ , og  $\tau_m$  bliver da

$$\tau_m = 2 \sqrt{\kappa \bar{\omega}_{to} \sigma_t} - \bar{\omega}_{to} \sigma_t \frac{t}{h} \quad (4.29)$$

Ved simpelt understøttede bjælker med jævnt fordelt belastning skal den dimensionsgivende forskydningskraft beregnes ved diagonalrevnens øvre ende (jfr. afsnit 4.4.5), d.v.s.

i afstanden  $c = h \cot \theta$  fra understøtningen. Da Gvozdev foretrækker at udtrykke forskydningsbæreevnen ved forskydningskraften over understøtningen, er det nødvendigt at addere et belastningsbidrag fra strækningen  $c$  til venstre side af (4.24). Når den jævnt fordelte belastning pr. længdeenhed betegnes  $q$ , findes svarende til (4.24)

$$\tau = \frac{T}{b_o h} = \kappa \tan \theta + \bar{w}_{to} \sigma_t \cot \theta + \frac{q h \cot \theta}{b_o h} \quad (4.30)$$

Det ses ved at trække de to sidste led sammen, at de øvrige formler kan anvendes uændret, når  $\bar{w}_{to} \sigma_t$  erstattes af  $\bar{w}_{to} \sigma_t + \frac{q}{b_o}$ .

Hillerborg har søgt at forbedre Gvozdevs formel ved også at tage hensyn til indflydelsen fra længdearmeringsforholdet. Hillerborg regner således med

$$\kappa = 42 (\sigma_T)^{\frac{1}{3}} (\bar{w}_{ao})^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

hvor  $\sigma_T$  og  $\kappa$  er i  $\text{kp/cm}^2$ . Endvidere regnes med, at bøjlerne i middel kun når halvdelen af flydespændingen, altså  $\sigma_t = \frac{1}{2} \sigma_{tf}$ .

Regan [68.10] angiver for 113 simpelt understøttede, punktbelastede, rektangulære bjælker med normalbøjler (samme forsøgsmateriale som nævnt i afsnit 4.5.1), at Hillerborgs formel har en middelværdi af beregnet  $(\tau_m)/\text{målt } (\tau_m)$  på 1,10 og en variationskoefficient på 13%.

I Appendix B er ovennævnte beregningsmetode udvidet til også at omfatte bøjlearmering bestående af skråbøjler.

#### 4.5.3 Forskydningstrykbrudteorier

En række forfattere baserer forskydningsbrudlasten på betragtninger om bjælkens forskydningstrykbrudlast. Momentet  $M_u$  til bestemmelse af bjælkens bæreevne ved forskydningstrykbrud antages at bestå af to bidrag: ét fra forskydningsarmeringen  $M_t$  (svarende til sidste led i (4.7)), og ét fra bjælkens forskydningstrykbrudlast  $M_b$  uden forskydningsarmering (svarende til formlerne i afsnit 3.5). Heraf fås

$$M_u = M_b + M_t \quad (4.32)$$

Regan [68.10] antager, at  $M_b$  er afhængig af diagonalrevnens hældning  $\theta$ , mens bl.a. Guralnick [59.2], Walther [62.15] og Ojha [67.14] regner  $M_b$  uafhængig heraf.

Bestemmelse af forskydningstrykbrudlasten  $M_b$  er allerede omtalt i afsnit 3.5, og kun Regans simplificerede teori vil blive omtalt.

Når momentarmen  $z$  regnes lig nyttehøjden  $h$  og bøjlevinklen  $\alpha = 90^\circ$  findes, idet  $M_t$  indsættes fra sidste led i (4.7) og  $M_b$  indsættes fra (3.18) (afsnit 3.5.5)

$$\mu = \frac{M_u}{b_o h^2} = \eta \tan \theta + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t \cot^2 \theta \quad (4.33)$$

Her er

$$\eta = 17,8 \frac{M}{T_h} (\bar{w}_{ao} \sigma_c)^{\frac{1}{3}} \quad (4.34)$$

idet  $\bar{w}_o$  i (3.18) er erstattet af armeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ .  $\eta$  og  $\sigma_c$  angives i  $\text{kp/cm}^2$ .\*

Ligesom det er tilfældet med  $\tau$  i afsnit (4.5.2), har  $\mu$  som funktion af  $\cot \theta$  et minimum, der bestemmes af

$$\frac{\partial \mu}{\partial \cot \theta} = -\eta \tan^2 \theta + \bar{w}_{to} \sigma_t \cot \theta = 0 \quad (4.35)$$

Den værdi  $\theta_m$ , der giver mindst  $\mu$  bestemmes af

$$\cot \theta_m = \left( \frac{\eta}{\bar{w}_{to} \sigma_t} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.36)$$

Indsat i (4.33) findes minimalværdien  $\mu_m$

$$\mu_m = \min \left[ \frac{M_u}{b_o h^2} \right] = \frac{3}{2} (\eta)^{\frac{2}{3}} (\bar{w}_{to} \sigma_t)^{\frac{1}{3}} \quad (4.37)$$

Regan anfører, at (4.34) og (4.37) for 113 simpelt understøttede, punktbelastede, rektangulære bjælker med normalbøjler (samme forsøgsmateriale som nævnt i afsnit 4.5.1 og 4.5.2) har en middelværdi af beregnet ( $\mu_m$ )/målt ( $\mu_m$ ) på 0,89 og en variationskoefficient på 14%.

Som grænse for kropstrykbrud angiver Regan

---

\* Se fodnote afsnit 2.3.1

$$\frac{T}{b_o h} \leq \frac{1}{4} \sigma_c (2 + \cot \alpha) \max. \begin{bmatrix} 0,8 - \frac{t}{h} \sin \alpha \\ 0,4 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Denne formel kan, bortset fra det sidste korrektionsled findes af (4.10) og (4.12) ved at sætte  $\sigma_b = \frac{1}{2} \sigma_c$ ,  $\cot \theta = 2$  og  $T_t = T$ .

Regan har også udvidet ovennævnte formler til at gælde skråbøjler, hvor  $\mu_m$  ikke kan udtrykkes eksplicit. Dette tilfælde er delvis behandlet i Appendix B.

#### 4.5.4 Minimumsarmeringsteori, plasticitetsteori

Nielsen [67.13] opstiller et udtryk til bestemmelse af forskydningsbrudlasten for simpelt understøttede bjælker med normalbøjler, idet den samlede armering (længdearmering + bøjlearmering) pr. længdeenhed minimaliseres. Der regnes ikke med nogen optagelse af forskydningskræfter i betontrykzonen eller i længdearmeringen (dornvirkningen). Brudlasten bestemmes derved alene af bøjlernes bidrag  $T_t$ . Med  $\alpha = 90^\circ$  findes af (4.6)

$$\frac{T}{b_o z} = \frac{T_t}{b_o z} = \bar{w}_{to} \sigma_t \cot \theta \quad (4.39)$$

Trækraften  $N_a$  i længdearmeringen findes af (4.9), idet (4.39) anvendes

$$N_a = \frac{M_A}{z} + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t b_o z \cot^2 \theta = \frac{M_A}{z} + \frac{1}{2} T \cot \theta \quad (4.40)$$

Ved anvendelse af plasticitetsteorien i forbindelse med valg af passende tilladelige spændingsfordelinger findes, at  $\cot \theta$  kan vælges frit. Som øvre grænse for  $\cot \theta$  haves to betingelser: dels må  $\cot \theta$  ikke vælges større end  $\frac{a}{z}$ , og dels må betontrykspændingen  $\sigma_b$  i bjælke kroppen ikke være større end betonens effektive trykbrudstyrke, der af Nielsen regnes lig  $0,85 \sigma_c$ .  $\sigma_b$  findes af (4.11), hvorved betingelsen bliver, idet  $\alpha = 90^\circ$

$$\sigma_b = \bar{w}_{to} \sigma_t (1 + \cot^2 \theta) \leq 0,85 \sigma_c \quad (4.41)$$

Talfaktoren 0,85 bør nok ikke være en konstant, men f. eks. afhænge af længdearmeringens anordning, idet denne er af betydning for kraftoverførslen mellem armering og beton.

Nielsen bestemmer  $\cot\theta$  ved at kræve minimum for det samlede armeringsvolumen pr. længdeenhed  $V$ . Ved anvendelse af (4.39) og (4.40) bliver  $V$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{N_a}{\sigma_{af}} + (z + b_o) \frac{A_t}{t} \\ &= \frac{M_A}{z\sigma_{af}} + \frac{T}{2\sigma_{af}} \cot\theta + \frac{T}{\sigma_t} \left(1 + \frac{b_o}{z}\right) \tan\theta \end{aligned} \quad (4.42)$$

hvor  $\sigma_{af}$  er længdearmeringens flydespænding,  $\sigma_t = \sigma_{tf}$ , og der er taget hensyn til bjælnernes udstækning vinkelret på bjælkeaksen. Endvidere forudsættes et jævnt aftagende længdearmeringstværsnit.

Når  $V$  opfattes som funktion af  $\theta$ , ses det, at  $V$  har minimum for

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{2\sigma_{af}}{\sigma_{tf}} \left(1 + \frac{b_o}{z}\right)} \quad (4.43)$$

Når  $\cot\theta < \frac{a}{z}$  findes forskydningsbrudlasten  $T_u$  herefter af (4.39) og (4.43)

$$\frac{T_u}{b_o z} = \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \sqrt{\frac{2\sigma_{af}}{\sigma_{tf}} \left(1 + \frac{b_o}{z}\right)} \quad (4.44)$$

Den maksimale værdi af  $T_u$  findes, når  $\sigma_b = 0,85\sigma_c$  og  $\cot\theta$  fra (4.41) indsættes i (4.39)

$$\frac{T_u}{b_o z} \leq \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \sqrt{\frac{0,85\sigma_c}{\bar{w}_{to}\sigma_{tf}} - 1} \leq \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \frac{a}{z} \quad (4.45)$$

I (4.45) må  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf}$  ikke indsættes større end  $0,425\sigma_c$ , idet en større værdi af  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf}$  iflg. Nielsen vil medføre, at bjælrerne ikke flyder. Det vil dog være på den sikre side at anvende (4.45), når  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf} > 0,425\sigma_c$ .

(4.44) er som nævnt udledt under forudsætning af et jævnt aftagende længdearmeringsareal. Når formelen udvides til også at gælde bjælker med konstant længdearmeringsareal, giver forskydningsbæreevnens afhængighed  $\sigma_{af}$  imidlertid anledning til uoverensstemmelse med forsøg. Af afsnit 4.4.3 fremgår det således, at forskydningsbrudlasten vokser med voksende armeringsforhold  $\bar{w}_{ao}$ , og at længdearmeringen ved forskydningsbrud normalt ikke flyder. Af to bjælker med samme  $\sigma_{af}$   $\bar{w}_{ao}$ , men forskelligt  $\sigma_{af}$ , vil bjælken med lavest  $\sigma_{af}$  derfor have den største bæreevne i modstrid med (4.44).

Da de fleste bjælker i praksis udføres med ubrudt længdearmering, vil det iflg. ovenstående være mest økonomisk at indlægge en bøjlearmering svarende til den største værdi af  $\cot\theta$ , d.v.s. at anvende (4.45). I afsnit 4.5.5 er denne formel derfor også undersøgt.

Både (4.44) og (4.45) er imidlertid i uoverensstemmelse med erfaringen fra forskydningsforsøg, idet  $\frac{a}{z}$  skulle give aftagende forskydningsbæreevne, når  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf}$  er konstant. Dette er i modstrid med, hvad der er nævnt i afsnit 4.4.3. Hvis (4.45) skal give bedre overensstemmelse med forsøg, må den derfor foruden det, der allerede er nævnt angående den effektive trykbrudstyrke, udvides med et udtryk af en helt anden form, der for  $\cot\theta < \frac{a}{z}$  tages hensyn til buevirkningen.

#### 4.5.5 Sammenligning af beregningsformler

På fig. 4.8a-d er der foretaget en afbildning af forskydningsbæreevnen  $\tau$  bestemt ved de formler, der er omtalt i de foregående afsnit. Som abscisse er valgt de 4 væsentligste parametre:  $\frac{a}{h}$ ,  $\bar{w}_{ao}$ ,  $\sigma_c$  og  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf}$ . På fig. 4.8c og d er der endvidere indtegnet nogle enkelte forsøgsresultater. Når der ikke er indtegnet flere, skyldes det, at der, trods det store antal forskydningsforsøg, der er refereret i litteraturen, ikke findes nogen forsøgsserie, hvor kun en enkelt af parametrene  $\frac{a}{h}$ ,  $\bar{w}_{ao}$  eller  $\sigma_c$  er varieret over et større interval. Figurerne kan dog, når de anvendes sammen med resultaterne fra Regans undersøgelse af beregnet ( $\tau$ )/målt ( $\tau$ ) for nogle af formlerne, tjene til en vurdering af de formler, der ikke er omfattet af denne analyse.

Sammenligningen er foretaget for simpelt understøttede bjælker med normalbøjler, hvor belastningen består af en eller to enkeltkræfter i afstanden  $a$  fra understøtningen. Hvor  $\sigma_T$  indgår i det oprindelige udtryk, er der regnet med  $\sigma_T = 1,25\sigma_c$ .  $\frac{t}{h}$  er sat lig  $\frac{1}{2}$ , og  $\frac{z}{h}$  er beregnet efter Appendix A. Øvrige værdier af de indgående parametre fremgår af teksten på figurerne.

I det følgende er de undersøgte beregningsformler angivet med ovennævnte indskrænkninger. Nummereringen i dette afsnit svarer til den på fig. 4.8 valgte, og enhederne for de indgående spændinger er overalt  $\text{kp/cm}^2$ .

- 1) Viest (ACI-ASCE), ligning (2.23) og (4.21)

$$\tau = \tau_{cr} + \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \leq 2,65 \sqrt{\sigma_c}$$

$$\tau_{cr} = 0,50 \sqrt{\sigma_c} + 176 \frac{\bar{w}_{ao}}{\frac{a}{h} - 1} \leq 0,93 \sqrt{\sigma_c} \quad 1)$$

- 2) Leonhardt, ligning (4.22) og (4.23)

$$\tau = \left( \frac{1}{16} \sigma_c + \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \right) \frac{z}{h} \leq 0,175 \sigma_c \frac{z}{h} \quad 2)$$

- 3) Gvozdev, ligning (4.25) og (4.29)

$$\tau = \sqrt{0,75 \sigma_c \bar{w}_{to} \sigma_{tf}} - \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \quad 3)$$

- 4) Hillerborg, ligning (4.28) og (4.31)

$$\tau = 9,5 (\sigma_c)^{\frac{1}{6}} (\bar{w}_{ao})^{\frac{1}{4}} (\bar{w}_{to} \sigma_{tf})^{\frac{1}{2}} \quad 4)$$

- 5) Regan, ligning (4.34), (4.37) og (4.38), idet  $\tau = \mu \frac{h}{a}$

$$\tau = 10,2 \left( \frac{a}{h} \right)^{\frac{1}{3}} (\sigma_c \bar{w}_{ao})^{\frac{2}{9}} (\bar{w}_{to} \sigma_{tf})^{\frac{1}{3}} \leq 0,2 \sigma_c \quad 5)$$

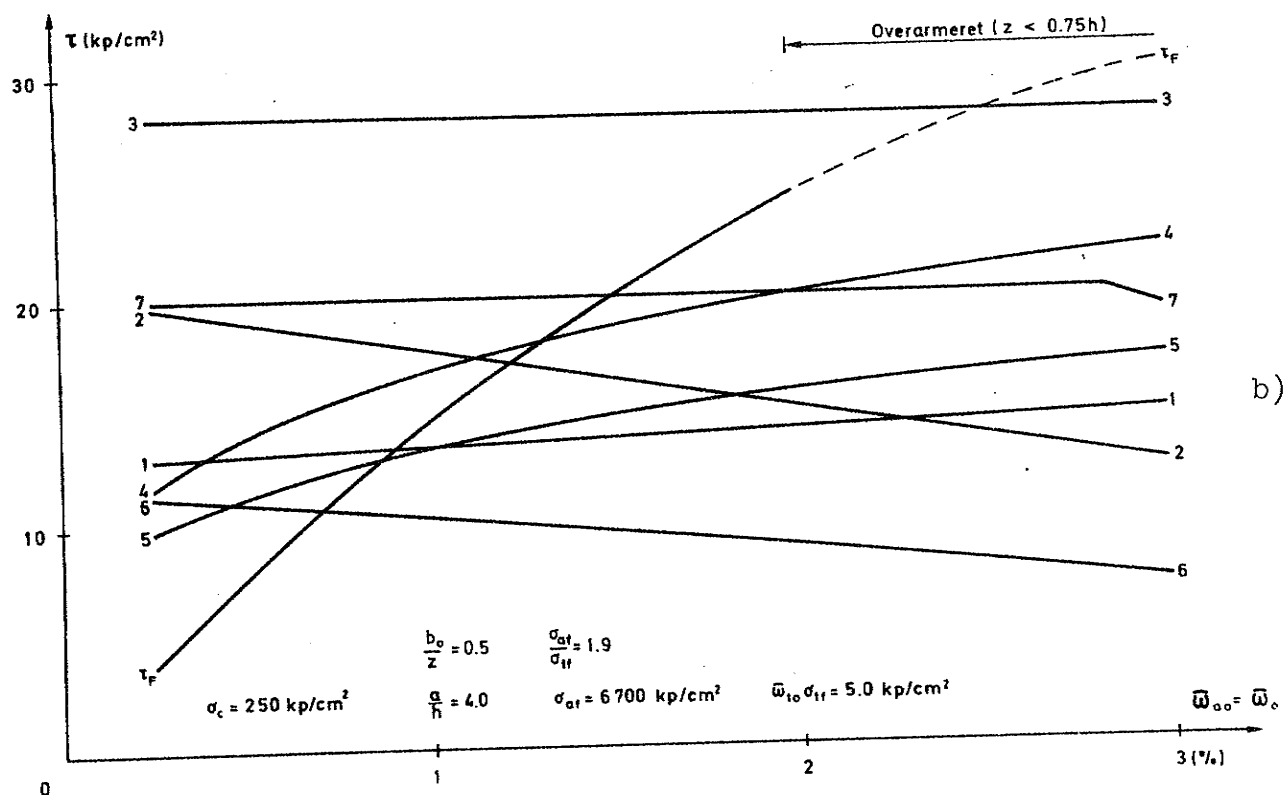
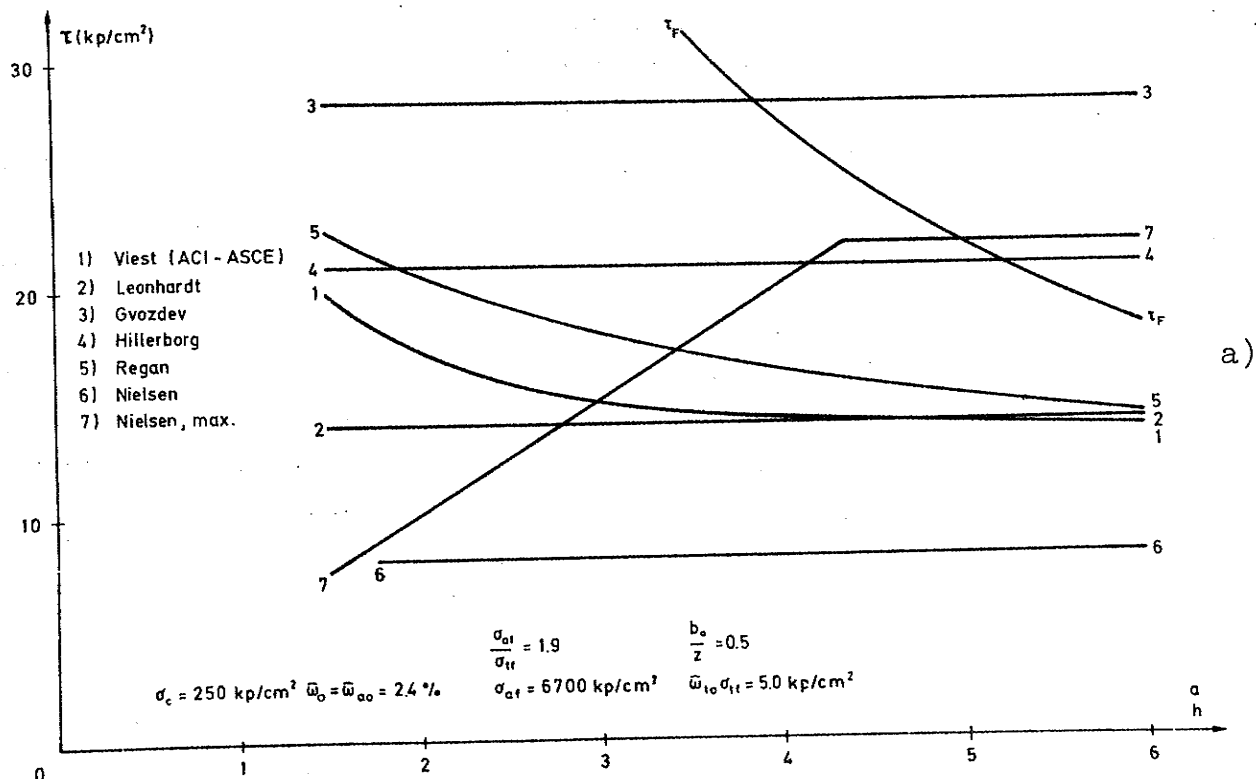


Fig. 4.8a,b Sammenligning af beregningsformler for forskydningsbæreevnen.



6) Nielsen, ligning (4.44)

$$\tau = \sqrt{\frac{2\sigma_{af}}{\sigma_{tf}} \left(1 + \frac{b}{z}\right)} \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \frac{z}{h} \leq \bar{w}_{to} \sigma_{tf} \frac{a}{h} \quad (6)$$

7) Nielsen, max. (4.45)

$$\tau = \sqrt{\frac{0,85\sigma_c}{\bar{w}_{to}\sigma_{tf}} - 1} \bar{w}_{to}\sigma_{tf} \frac{z}{h} \leq \bar{w}_{to}\sigma_{tf} \frac{a}{h} \quad (7)$$

På fig. 4.8 er endvidere indtegnet den forventede bøjningsbrudlast  $\tau_F$  beregnet efter Appendix A.

$\frac{a}{h}$ . Fig. 4.8a

Af figuren fremgår det, at indflydelsen fra  $\frac{a}{h}$  i det almindeligste anvendelsesområde, hvor  $\frac{a}{h} > 3$ , er uvæsentlig. En undtagelse herfra er dog formel 7) Nielsen max., hvilket allerede er behandlet i afsnit 4.5.4. I afbildningen er ikke medtaget den stigning i brudlasten, som ifølge formlerne 3) Gvozdev, 4) Hillerborg og 5) Regan skulle kunne opnås, når  $\cot\theta$  bliver større end  $\frac{a}{h}$ .

$\bar{w}_{ao}$ . Fig. 4.8b

Det, der især bemærkes ved denne figur, er, at formlerne 2) Leonhardt, 6) Nielsen og 7) Nielsen max. giver en svagt aftagende forskydningsbæreevne for voksende  $\bar{w}_{ao}$ , hvilket skyldes afhængigheden af  $\frac{z}{h}$ . Dette er i modstrid med forsøg, jfr. afsnit 4.4.4.

$\sigma_c$ . Fig. 4.8c

Det fremgår af figuren, at der ved lave værdier af  $\sigma_c$  sker en begrænsning af  $\tau$  ifølge formlerne 1) Viest, 2) Leonhardt og 5) Regan. Endvidere fremgår det, at stigningen af forskydningsbæreevnen som funktion af  $\sigma_c$  er ganske betydelig ifølge formlerne 2) Leonhardt, 3) Gvozdev og 7) Nielsen max. i forhold til den stigning, som de øvrige formler giver.

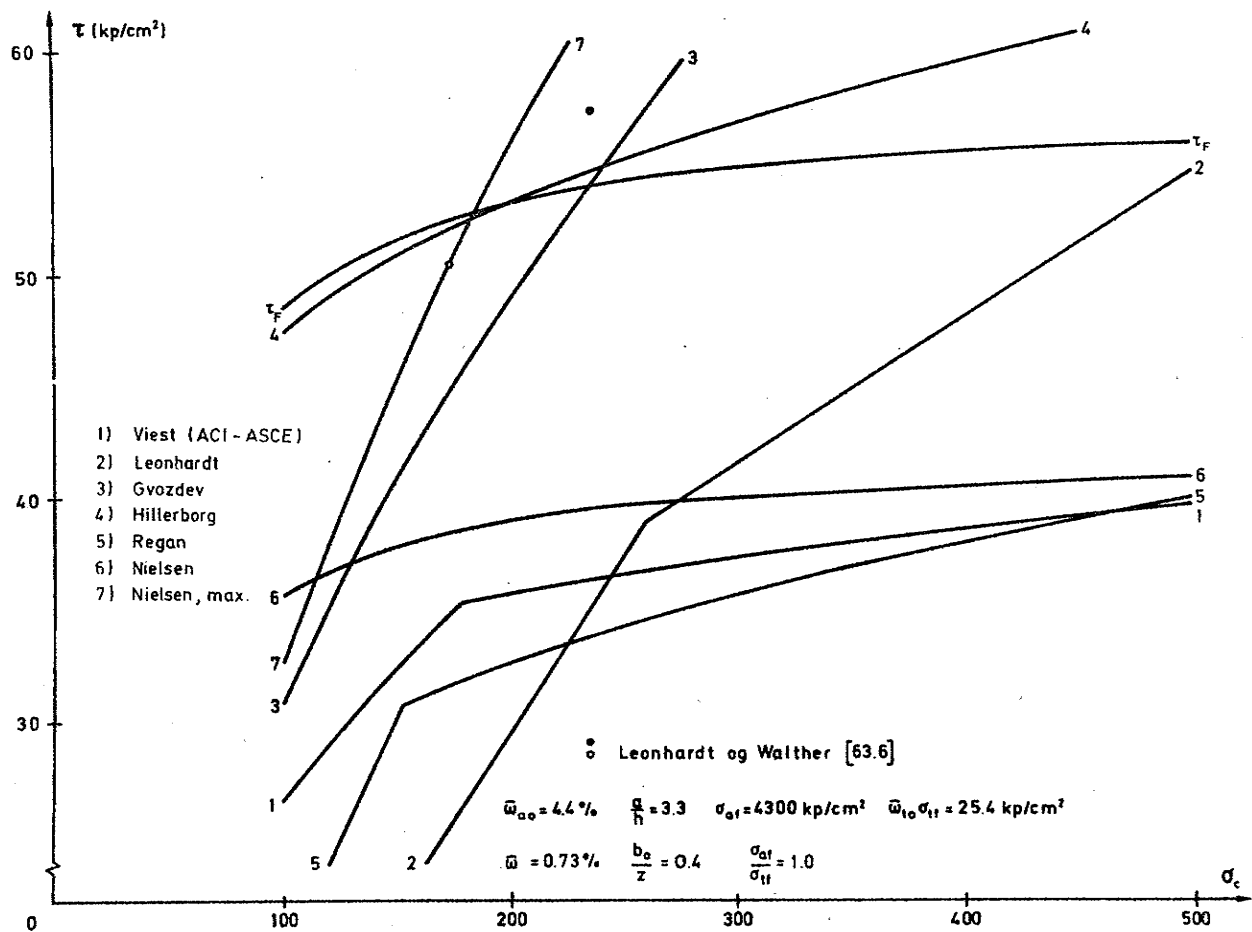


Fig. 4.8c Sammenligning af beregningsformler for forskydningsbæreevnen.

$\bar{\omega}_{to}\sigma_{tf}$ . Fig. 4.8d

Det ses, at der for lave værdier af  $\bar{\omega}_{to}\sigma_{tf}$  er en udpræget forskel mellem forskydningsbæreevnen i henhold til de forskellige formler. Dette har imidlertid ikke nogen større praktisk betydning, idet bjælken i dette område ofte vil have en minimumsforskydningsarmering af hensyn til faren for uvarslet brud.

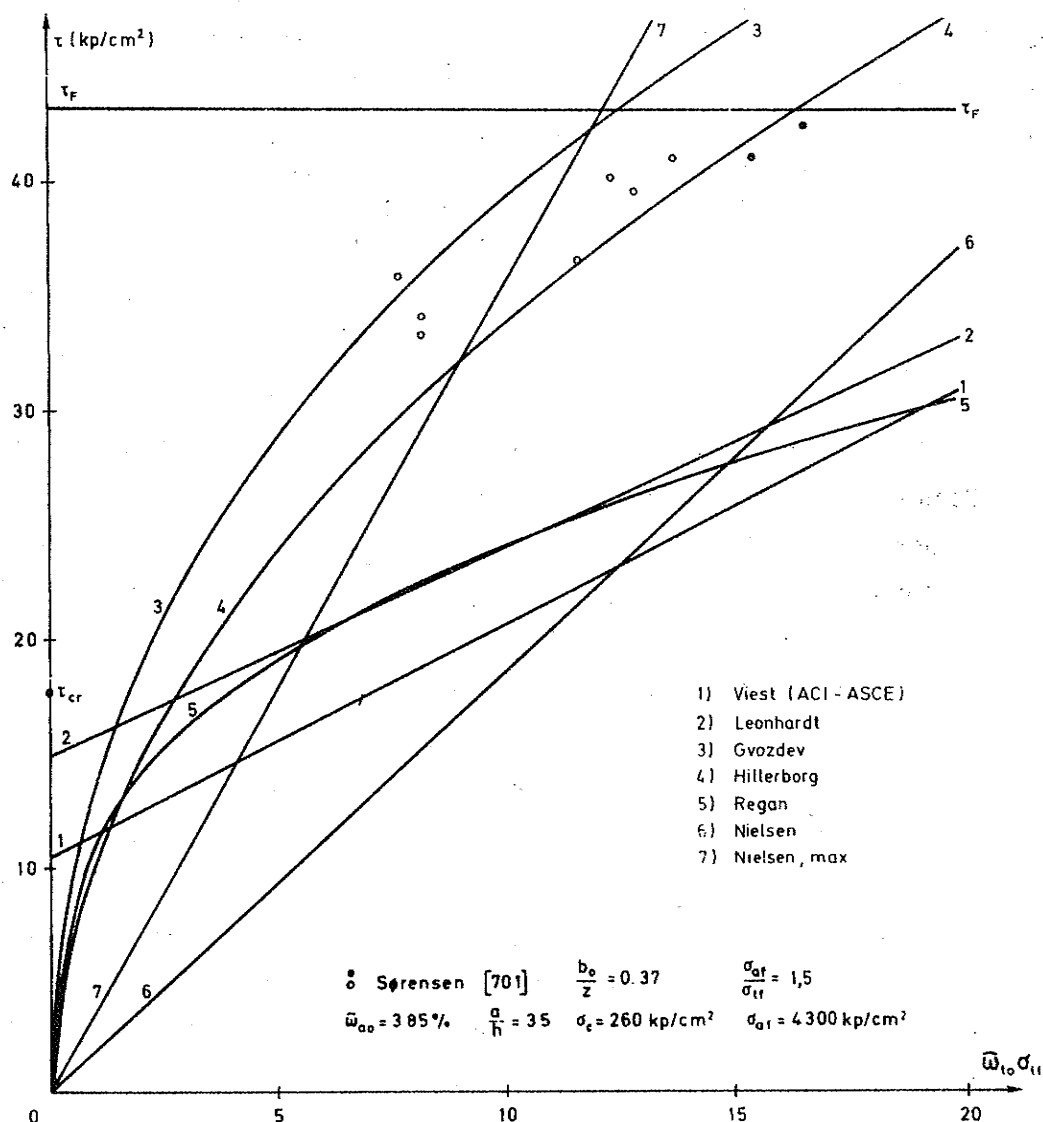


Fig. 4.8d Sammenligning af beregningsformler for forskydningsbæreevnen.

#### Generelle bemærkninger til fig. 4.8

Gvozdevs formel 3) giver hovedsagelig en forskydningsbæreevne, der ligger betydelig over, hvad der findes ved de øvrige formler, og hvad der findes ved forsøg.

Regans formel 5) og Viests formel 1) giver trods forskellig opbygning næsten samme resultat, hvilket også bekræftes af Regans undersøgelse. Nielsens formel 6) og

Leonhardts formel 2) grupperer sig hovedsagelig omkring disse formler. Leonhardts formel 2) afviger dog betydeligt fra de øvrige med hensyn til afhængigheden af  $\sigma_c$ , hvilket ikke synes i overensstemmelse med forsøg.

Nielsens max. formel 7) er vanskelig at bedømme ud fra fig. 4.8, idet  $\frac{a}{h}$ -afgrænsningen er afgørende i 3 af de undersøgte tilfælde. Af diskussionen til Nielsen [67.13] og delvis af fig. 4.8c fremgår det, at formlen giver god overensstemmelse med Leonhardt og Walthers forsøg [63.6].

Bedst overensstemmelse med forsøg af de ovennævnte formler findes for Hillerborgs formel 4), hvis udtrykket 4) reduceres med ca. 10%, som det også fremgår af afsnit 4.5.2. Dog synes formlen at give for store værdier for T-bjælker med relativ høj  $\bar{w}_{ao}$  og lav  $\sigma_c$ , jfr. fig. 4.8c. En kombination med Nielsens max.formel 7) er en mulig løsning.

### Konklusion

Viests (ACI-ASCE) formelsæt (2.17) og (4.21) vil kunne anvendes til praktisk dimensionering med en forventet beregnet (T)/målt (T) forsøg på 0,8-0,9. Variationskoefficienten må forventes relativ stor, bl.a. fordi formlens opbygning på grundlag af diagonalrevnelasten ikke kan forventes at give nogen god beskrivelse af forholdene ved brud.

En bedre overensstemmelse med forsøgsresultater giver Hillerborgs (4.28) og (4.31), der bl.a. tager hensyn til diagonalrevnens hældning ændres, når  $\bar{w}_{to}\sigma_{tf}$  ændres. Formlen bør dog udvides med en øvre værdi, der tager hensyn til faren for kroptrykbrud ved bl.a. T-bjælker. I den forbindelse synes Nielsens max. formel (4.45) at være anvendelig, hvis  $\sigma_b$  udvides til foruden  $\sigma_c$  også at være en funktion af  $\bar{w}_{ao}$ .

Leonhardts, Regans og Nielsens formler vil kunne forventes at give værdier på den sikre side, idet dog kun Regans formel er undersøgt for et større forsøgsmateriale.

Grozdevs formel giver generelt værdier på den usikre side, normalt mere end ca. 30%.

#### 4.6 Resumé

For bjælker med forskydningsarmering vil der lige som for bjælker uden forskydningsarmering foregå en kraftomlejring efter diagonalrevnens dannelselse. Bjælken må således opfattes som et foranderligt system, hvilket medfører en vis usikkerhed ved beregning af forskydningsbrudlasten.

Forsøg viser, at en forskydningsarmering ikke kan hindre en diagonalrevnedannelse, men at armeringens formål er dels at hindre diagonalrevnens åbning, dels at fordele revnerne. Den mest effektive forskydningsarmering vil derfor være en tætliggende bøjlearmering, hvor bøjlerne omslutter længdearmeringsstængerne, og hvor bøjlerne er forankrede i bjælkens trykzone. Forskydningsarmering i form af opbøjet længdearmering må derimod frarådes bl.a. af hensyn til revnefare ved opbøjningspunktet. Hvis denne form for forskydningsarmering alligevel anvendes, kan den fulde flydespænding imidlertid ikke udnyttes (afsnit 4.4.2).

Forskydningsbæreevnen  $\tau$  kan opfattes som bestående af to bidrag, dels et fra bjælkens trykzone, dels et fra forskydningsarmeringen, mens der i praksis normalt kan ses bort fra dornvirkningen. Betontrykzonens forskydningsoptagelse afhænger tilnærmet af de fire parametre: betonens trykstyrke  $\sigma_c$ , længdearmeringsforholdet  $\bar{w}_{ao}$ ,  $\frac{M}{Th}$ -forholdet og diagonalrevnens hældning  $\theta$ . Bøjlernes bidrag afhænger af forskydningsarmeringsforholdet  $\bar{w}_{to}$ , bøjlernes flydespænding  $\sigma_{tf}$ , bøjlernes hældning  $\alpha$  og diagonalrevnens hældning  $\theta$ . Indflydelsen fra diagonalrevnens hældning medfører, at de to bidrag ikke er uafhængige.

Når en bøjlearmering ikke er anbragt med en afstand større end ca.  $z$ , vil et forskydningsbrud være et varslet brud. Hvis der ikke er fare for kroptrykbrud, vil bjælken først få forskydningsbrud, når bøjlerne har nået flydning. Bjælken udviser en vis plasticitet, idet en svagere forskydningsarmering giver fladere diagonalrevner end en kraftigere forskydningsarmering. Dette kommer også til udtryk i nogle af de omtalte beregningsudtryk.

Ved anvendelse af Hillerborgs beregningsformel (afsnit 4.5.2), kan forskydningsbrudlasten for simpelt understøttede

punktbelastede, rektangulære bjælker med normalbøjler bestemmes med en middelværdi af beregnet ( $\tau$ )/målt ( $\tau$ ) på ca. 1,1 og en variationskoefficient på ca. 13%. Anvendelse af Viests (ACI-ASCE) formel giver en variationskoefficient på 17% og en middelværdi af beregnet ( $\tau$ )/målt ( $\tau$ ) på 0,8. Viests formel kan på den sikre side også anvendes ved andre tværsnits- og belastningsformer, dog med en noget større variationskoefficient.

Tilbage står imidlertid stadig en række uløste problemer, hvoraf nogle af de vigtigste kort skal nævnes.

- 1) Der savnes tilfredsstillende kompatibilitetsbetingelser, der bl.a. kan beskrive diagonalrevnens hældning og sammenhængen mellem betontrykzonens og forskydningsarmeringens bidrag til forskydningsoptagelsen.
- 2) Der savnes forsøg med bøjler, hvor bøjlernes hældning varieres, idet  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$  holdes konstant. Enkelte forsøg antyder, at der findes en værdi  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , hvor bøjlerne vil være mest effektive. Hvor der er fare for kroptrykbrud, og hvor det gælder om at mindske trækkræften i længdearmeringen, vil bøjler med  $\alpha = 45^\circ$  være de mest effektive i forhold til bøjler vinkelret på bjælkeaksen, mens forholdene er uafklarede for mindre værdier af  $\bar{w}_{to} \sigma_{tf}$ .
- 3) Der savnes forsøg med bøjler, hvor flydespændingen er større end ca.  $4500 \text{ kp/cm}^2$ . De store tøjninger, der kræves for at udnytte  $\sigma_{tf}$ , kan muligvis medføre kroptrykbrud, inden bøjlerne er fuldt udnyttede.
- 4) Der savnes forsøg med bjælker, hvor en vis del af forskydningsarmering er parallel med bjælkeaksen.
- 5) Der savnes forsøg, hvor vederlagets udstrækning er forholdsvis lille, og belastningen er således placeret, at der er fare for forskydningstrækbrud (forankringsbrud). Dette spørgsmål har især betydning ved præfabrikerede bjælker.
- 6) I forbindelse med punkt 5 savnes forsøg, hvor bjælken er indstøbt i tværbjælker, og vederlagstrykket dermed ikke

virker direkte på bjælkens underside. Tilsvarende savnes forsøg, hvor belastningen frembringes af indstøbte bjælker.

- 7) Der savnes forsøg med gentagende belastning, hvor denne har en størrelse f.eks. svarende til diagonalrevnelasten. Når brugslasten ligger på dette niveau, kan det tænkes, at der på grund af den gentagne belastning er fare for en fremadskridende revneudvikling.

## 5. Litteraturfortegnelse

### 5.1 Kronologisk oversigt

- [1899.1] Ritter, W.  
Die Bauweise Hennebique.  
Schweizerische Bauzeitung V.33, No.7, 1899, p.59-61.
- [12.1] Mörsch, E.  
Der Eisenbetonbau (4.Auflage).  
Stuttgart 1912, 710 pp.
- [27.1] Richart, F.E.  
An Investigation of Web Stresses in Reinforced Concrete Beams.  
University of Illinois, Engineering Experiment Station. Bulletin No.166, 1927, 106 pp.
- [28.1] Johansen, K.W.  
Om Virkningen af Bøjler og Skraaljern i Jærnbetonbjælker.  
Danmarks Naturvidenskabelige Samfund, A. No.17, København 1928, 50 pp.
- [45.1] Johansen, K.W.  
Beregning af Jærnbetonbjælker.  
Bygningsstatistiske Meddelelser V.16, No.2, 1945, pp.35-63.
- [45.2] Moretto, O.  
An Investigation of the Strength of Welded Stirrups in Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.42, No.2, 1945, pp.141-162.
- [49.1] Sunderland, A.  
The Strength of Reinforced Concrete in Shear.  
Magazine of Concrete Research, No.1, 1949.
- [51.1] Mains, R.M.  
Measurement of the Distribution of Tensile and Bond Stresses Along Reinforcing Bars.  
ACI-Journal. Proceedings V.48, No.3, 1951, pp.225-252.
- [51.2] Wilby, C.B.  
The Strength of Reinforced Concrete Beams in Shear.  
Magazine of Concrete Research, No.7, 1951, p.23-30.
- [52.1] Hognestad, E.  
What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete.  
University of Illinois, Engineering Experiment Station. Circular Series No.64, 1952, 47 pp.
- [54.1] Forsell, C.  
Schubfestigkeit und Schubbewehrung der Beton-Balken.  
Transactions Royal Inst. of Tech. Stockholm, No.78, 1954, 64 pp.
- [54.2] Moody, K.G., Vliest, J.M., Elstner, R.C., Hognestad, E.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams. Part 1 - Test of Simple Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.51, No.4, 1954, pp.317-332.
- [55.1] Laupa, A., Sless, C.P., Newmark, N.M.  
Strength in Shear of Reinforced Concrete Beams.  
University of Illinois, Engineering Experiment Station. Bulletin No.428, 1955, 73 pp.
- [55.2] Taub, J.  
Discussion to Moody m.f. [54.2].  
ACI-Journal. Proceedings V.52, No.4, Part 2, 1955, pp.732, 12-23.
- [56.1] Ferguson, P.M.  
Some Implications of Recent Diagonal Tension Tests.  
ACI-Journal. Proceedings V.53, No.2, 1956, pp.157-172.
- [56.2] Johansen, K.W.  
Critical Remarks on the Effect of Bent-up Bars and Stirrups in Reinforced Concrete Beams.  
5. IABSE Congress Lishon 1956, Final Report (1957), pp.507-512.
- [56.3] Walther, R.  
Über die Beanspruchung der Schubarmierung von Eisenbetonbalken.  
Schweizerische Bauzeitung V.74, No.1,2,3, 1956, pp.8-17, 34-37.
- [57.1] Morrow, J., Vliest, I.M.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Frame Members without Web Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.53, No.9, 1957, pp.833-869.
- [57.2] Symposium on AMC Warehouse Failure.  
Anderson, B.G.  
Rigid Frame Failure.  
ACI-Journal. Proceedings V.53, No.7, 1957, pp.625-636.  
Elstner, R.C., Hognestad, E.  
Laboratory Investigation of Rigid Frame Failure.  
ACI-Journal. Proceedings V.53, No.7, 1957, pp.637-668.
- [58.1] Matstein, D., Mathey, R.G.  
Strains in Beams Having Diagonal Cracks.  
ACI-Journal. Proceedings V.55, No.6, 1958, pp.717-728.



- [59.1] Ferguson, P.H., Matloob, F.H.  
Effect of Bar Cutoff on Bond and Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.56, No.1, 1959, pp.5-24.
- [59.2] Guralnick, S.A.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
ASCE-Proceedings. Journal of the Structural Division V.85, No.ST1, 1959, pp.1-42.
- [59.3] Rodriguez, J.J., Blanchini, A.C., Vlast, I.H., Kesler, C.E.  
Shear Strength of Two-Span Continuous Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.55, No.10, 1959, pp.1089-1130.
- [60.1] Bay, H.  
Schubbruch und Biegemoment.  
Beton- und Stahlbetonbau V.55, H.10, 1960, pp.230-235.
- [60.2] Brock, G.  
Effect of Shear on the Ultimate Strength of Rectangular Beams with Tensile Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.56, No.7, 1960, pp.619-637.
- [60.3] Diaz de Cossio, R., Sless, C.P.  
Behavior and Strength in Shear of Beams and Frames without Web Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.56, No.8, 1960, pp.695-735.
- [60.4] Guralnick, S.A.  
High-Strength Deformed Steel Bars for Concrete Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.57, No.3, 1960, pp.241-282.
- [60.5] Neville, A.M., Taub, J.  
Resistance to Shear of Reinforced Concrete Beams. Part 1-5.  
ACI-Journal. Proceedings V.57, No.2,3,4,5,6, 1960,  
pp.193-220, pp.315-336, pp.443-463, pp.517-532, pp.715-730.
- [60.6] Neville, A.M., Lord, E.  
Some Factors in the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
The Structural Engineer V.38, No.7, 1960, pp.213-223.
- [60.7] Neville, A.M.  
The Probleme of Shear in Reinforced Concrete Beams.  
Byggningsstatiska Meddelelser V.31, No.2, 1960, pp.37-62.
- [60.8] Taylor, R.  
Some Shear Tests of Reinforced Concrete Beams without Shear Reinforcement.  
Magazine of Concrete Research V.12, No.36, 1960, pp.145-154.
- [60.9] CEB Bulletin No.25, 1960, pp.7.01-7.30.  
Compte-Rendu de la 5ème Session de travail. Vienne 1959.  
CEB Bulletin No.9, 1958, pp.20-40.  
Compte-Rendu des Travaux de la Commission.  
CEB Bulletin No.19, 1959, pp.57-71.  
Conclusions techniques de la 5ème Session. Annexe 7,8.
- [61.1] Erdel, C.  
The Shearing Resistance of Beams by the Load-Factor Method.  
Concrete and Constructional Engineering V.56, No.9, 1961, pp.315-322.
- [61.2] CEB Bulletin No.33, 1961, pp.30-85.  
Compte-Rendu de la 6ème Session Plénière Monaco. Effort Tranchant.  
CEB Bulletin No.32, 1961, pp.19-25.  
Conclusion et Recommandations de la 6ème Session Plénière.
- [62.1] ACI-ASCE Committee 326.  
Shear and Diagonal Tension.  
ACI-Journal. Proceedings V.59, No.1,2,3, 1962, pp.1-30, pp.277-333, pp.353-395.
- [62.2] Bay, H.  
Biegung und Querkraft beim Verbundquerschnitt.  
Beton- und Stahlbetonbau V.57, H.4, 1962, pp.79-85.
- [62.3] Bay, H.  
Zur Schubtragfähigkeit bügelbewehrter Balken.  
Beton- und Stahlbetonbau V.57, H.12, 1962, pp.290-293.
- [62.4] Bjuggren, U.  
Skjuvböjbrott.  
Nordisk Betong V.6, No.2, 1962, pp.129-146.
- [62.5] Bryant, R.H., Blanchini, A.C., Rodriguez, J.J., Kesler, C.E.  
Shear Strength of Two-Span Continuous Reinforced Concrete Beams with Multiple Point Loading.  
ACI-Journal. Proceedings V.59, No.9, 1962, pp.1143-1177.
- [62.6] Erdel, C.  
Design of Reinforced Concrete for Combined Bending and Shear by Ultimate Load Theory.  
Structural Concrete V.1, No.1, 1962, pp.26-47.

- [62.7] Haugli, F.R.  
Stahlbetonbalken bei gleichzeitiger Einwirkung von Querkraft und Moment.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.145, pp.31-72.
- [62.8] Krefeld, W.J., Thurstone, C.W.  
Studies of the Shear and Diagonal Tension Strength of Simply Supported Reinforced Concrete Beams.  
Columbia University (New York), Department of Civil Engineering, 1962, 71 pp.  
el. kort [66.6] og [66.7].
- [62.9] Leonhardt, F., Walther, R.  
Versuche an einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.151, 1962, 83 pp.  
el.  
Beton- und Stahlbetonbau V.56, H.12, 1961, pp.277-290, V.57, H.2,3,6,7,8, 1962, pp.32-44, pp.54-64, pp.141-149, pp.161-173, pp.184-188.
- [62.10] Leonhardt, F., Walther, R.  
Versuche an Plattenbalken mit hoher Schubbeanspruchung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.152, 1962, 71 pp.
- [62.11] Hoe, J.  
Skræstrekk i armerte betongbjelker.  
Nordisk Betong V.6, No.1, 1962, pp.89-104.
- [62.12] Hoe, J.  
Discussion to ACI-ASCE Committee 326 [62.1].  
ACI-Journal. Proceedings V.59, No.9, 1962, pp.1323-1349.
- [62.13] Rüsch, H., Haugli, F.R., Mayer, H.  
Schubversuche an Stahlbeton-Rechteckbalken mit gleichmäßig verteilter Belastung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.145, 1962, pp. 1-30.
- [62.14] Sigalov, E., Strongin, S.  
Reinforced Concrete.  
Foreign Languages Publishing House, Moscow 1962. pp.1-106.
- [62.15] Walther, R.  
Über die Berechnung der Schubtragfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbalken - Schubbruchtheorien.  
Beton- und Stahlbetonbau V.57, H.11, 1962, pp.261-271.
- [62.16] van den Berg, F.J.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Web Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.59, No.10,11,12, 1962, pp.1467-1477, pp.1587-1600, pp.1849-1862.
- [62.17] CEB Bulletin No.37, 1962, 219 pp.  
Commission Effort Tranchant.
- [63.1] Bay, H.  
Schubspannung und Schrägbevrung bei kurzen Trägern.  
Der Bauingenieur V.38, H.1, 1963, pp.7-13.
- [63.2] Bay, H.  
Schubprobleme und Konstruktionspraxis.  
Der Bauingenieur V.38, H.7, 1963, pp.262-267.
- [63.3] Bresler, B., Scordelis, A.C.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.60, No.1, 1963, pp.51-74.  
el.  
Institute of Engineering Research Series 100, Issue 13, University of California, Berkeley 1961, 80 pp.
- [63.4] Franz, G., Niederhoff, H.  
Die Bewehrung von Konsolen und gedruckenen Balken.  
Beton- und Stahlbetonbau V.58, H.5, 1963, pp.112-120.
- [63.5] Hognestad, E., Hanson, H.V., Magura, D.D., Nass, H.A.  
Shear Strength of Slender Continuous Reinforced Concrete T-Beams.  
PCA-Journal V.5, No.3, 1963, pp.22-35.
- [63.6] Leonhardt, F., Walther, R.  
Schubversuche an Plattenbalken mit unterschiedlicher Schubbewehrung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.156, 1963, 84 pp.  
el. kort  
Versuche über den Einfluss des Schubdeckungsgrades und der Art der Schubbewehrung bei Plattenbalken.  
Beton- und Stahlbetonbau V.58, H.8,9, 1963, pp.184-190, pp.216-224.
- [63.7] Mathey, E.G., Watstein, D.  
Shear Strength of Beams without Web Reinforcement Containing Deformed Bars of Different Yield Strength.  
ACI-Journal. Proceedings V.60, No.2, 1963, pp.183-207.
- [63.8] Rausch, E.  
Zur Schubsischerung in Stahlbetonbau.  
Der Bauingenieur V.38, H.7, 1963, pp.257-262.

- [63.9] Taylor, R.  
Some Aspects of the Problem of Shear In Reinforced Concrete Beams.  
Civil Engineering and Public Works Review V.58, No.682,683, 1963, pp.629-632, pp.768-770.
- [63.10] Taylor, R.  
The Effect of the Type of Aggregate on the Diagonal Cracking of Reinforced Concrete Beams.  
Magazine of Concrete Research V.15, No.44, 1963, pp.87-93.
- [63.11] Taylor, R.  
A New Method of Proportioning Stirrups In Reinforced Concrete Beams.  
Magazine of Concrete Research V.15, No.45, 1963, pp.177-181.
- [63.12] Thürlimann, B., Varner, R.F.  
Design of Stirrup-Reinforcement In Concrete Beams.  
IABSE V.23, 1963, pp.363-380.
- [64.1] Bjuggren, U.  
Skjuvbrottforloppet hos den armerade betongbalken.  
Nordisk Betong V.8, No.1, 1964, pp.73-80.
- [64.2] Bresler, B., Scordelis, A.C.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams-Series II.  
Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley. 1964, 62 pp.
- [64.3] Brock, G.  
Discussion to Kanl [64.5]  
ACI-Journal. Proceedings V.61, No.12, 1964, pp.1624-1628.
- [64.4] Bross, B.B.  
Stress Distribution, Crack Patterns and Failure Mechanisms of Rectangular Concrete Members.  
ACI-Journal. Proceedings V.61, No.12, 1964, pp.1535-1556.
- [64.5] Kanl, G.N.J.  
The Riddle of Shear Failure and Its Solution.  
ACI-Journal. Proceedings V.61, No.4, 1964, pp.441-467.
- [64.6] Leonhardt, F., Walther, R., Dilger, W.  
Schubversuche an Durchlaufträgern.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.163, 1964, 138 pp.  
el. Beton- und Stahlbetonbau V.60, H.1,2,3,4, 1965, pp.5-15, pp.35-42, pp.92-104, pp.108-123.
- [64.7] Lorentsen, M.  
Shear and Bond In Prestressed Concrete Beams without Shear Reinforcement.  
Bygghörsningen. Handlingar No.47, Stockholm 1964, 195 pp.  
el. uddrag  
Theory for the Combined Action of Bending Moment and Shear In Reinforced and Prestressed  
ACI-Journal. Proceedings V.62, No.4, 1965, pp.403-420. Concrete Beams.
- [64.8] Petersson, T.  
Rektangulära och T-formade betongbalkars skjuvhållfasthet - en jämförelse.  
Bygghörsningen. Rapport 111, Stockholm 1964, 140 pp.
- [64.9] Taylor, R.  
Some Fatigue Tests on Reinforced Concrete Beams.  
Magazine of Concrete Research V.16, No.46, 1964, pp.31-38.
- [64.10] Walther, R.  
Schubprobleme im Stahlbetonbau.  
Cement V.16, No.11, 1964, pp.712-720.
- [64.11] Weigler, H., Becher, G.  
Zur Frage der Schubdruckfestigkeit von Beton.  
Beton- und Stahlbetonbau V.59, H.5, 1964, pp.101-105.
- [64.12] CEB Bulletin No.40, 1964, 256 pp.  
Effort Tranchant 1. Équilibre Interne après fissuration. Symposium de Wiesbaden 1963.
- [64.13] CEB Bulletin No.41, 1964, 232 pp.  
Effort Tranchant 2. Rupture- Résistance- Dispositions Constructives. Symp. de Wiesbaden 1963.
- [64.14] CEB Bulletin No.42, 1964, 251 pp.  
Effort Tranchant 3. Théories et Règles de calcul. Symposium de Wiesbaden 1963.
- [65.1] Acharya, D.N., Kemp, K.O.  
Significance of Dowel Forces on the Shear Failure of Rectangular Reinforced Concrete Beams.  
without Web Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.62, No.10, 1965, pp.1265-1279.
- [65.2] Day, H.  
Spannungsunlagerungen im Stahlbetonträger.  
Beton- und Stahlbetonbau V.60, H.12, 1965, pp.277-285.

- [65.3] Brinkmann, G.  
Zur Rissentwicklung in Stahlbetonbalken.  
Der Bauingenieur, V.40, H.11, 1965, pp.439-443.
- [65.4] de Paiva, H.A.R., Sless, C.P.  
Strength and Behavior of Deep Beams in Shear.  
ASCE-Proceedings, Journal of the Structural Division V.91, No.ST5, 1965, pp.19-42.
- [65.5] Fuchssteiner, W.  
Zur Frage der Schubbewehrung.  
Beton- und Stahlbetonbau V.60, H.3, 1965, pp.72-79.
- [65.6] Keenan, W.A.  
Dynamic Shear Strength of Reinforced Concrete Beams, Part I.  
U.S. Naval Civil Engineering Laboratory TR-395, 1965, 83 pp. (DNR AD 627661).
- [65.7] Leonhardt, F.  
Die verminderte Schubdehnung bei Stahlbeton-Tragwerken.  
Der Bauingenieur V.40, H.1, 1965, pp.1-15.  
el.  
Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs.  
Magazine of Concrete Research V.17, No.53, 1965, pp.187-198.
- [65.8] Leonhardt, F.  
Über die Kunst des Bewehrns von Stahlbetontragwerken.  
Beton- und Stahlbetonbau V.60, H.8,9, 1965, pp.181-192, pp.212-220.
- [65.9] Leonhardt, F., Walther, R.  
Geschweifte Bewehrungsmatten als Bügelbewehrung. Schubversuche an Plattenbalken.  
Die Bautechnik V.42, H.10, 1965, pp.329-341.
- [65.10] Nehmel, A., Becher, G.  
Zur Schubmessung des kurzen Kragarmes.  
Der Bauingenieur V.40, H.6, 1965, pp.224-231.
- [65.11] Rausch, E.  
Zur Schubbewehrung in Stahlbetonbau.  
Beton- und Stahlbetonbau V.60, H.10, 1965, pp.238-242.
- [65.12] Robinson, J.R.  
Influence of Transverse Reinforcement on Shear and Bond Strength.  
ACI-Journal. Proceedings V.62, No.3, 1965, pp.343-362.
- [65.13] CER Bulletin No.49, 1965, 158 pp.  
Conclusions de la 9ieme Session Pleniére Ankara 1964.
- [66.1] Bachmann, H., Thürlimann, D.  
Schubmessung von Balken und Platten aus Stahlbeton, Stahlbeton mit Spannzulagen und  
Schweizerische Bauzeitung V.84, H.33,34, 1966, pp.583-591, pp.599-606. Spannbeton.
- [66.2] Baron, H.J.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams at Points of Bar Cutoff.  
ACI-Journal. Proceedings V.63, No.1, 1966, pp.127-134.
- [66.3] Bay, H.  
Die Schubspannungen in Ideallisiert-anisotropen Stahlbetonträger.  
Beton- und Stahlbetonbau V.61, H.7, 1966, pp.174-176.
- [66.4] Dillger, W.  
Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss  
auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.179, 1966, 101 pp.
- [66.5] Kani, G.H.J.  
Basic Facts concerning Shear Failure.  
ACI-Journal. Proceedings V.63, No.6, 1966, pp.675-692.
- [66.6] Krefeld, W.J., Thurstone, C.W.  
Contribution of Longitudinal Steel to Shear Resistance of Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.63, No.3, 1966, pp.325-344.  
el. [62.8]
- [66.7] Krefeld, W.J., Thurstone, C.W.  
Studies of the Shear and Diagonal Tension Strength of Simply Supported Reinforced Concrete  
ACI-Journal. Proceedings V.63, No.4, 1966, pp.451-476. Beams.  
el. [62.8]
- [66.8] Leonhardt, F., Walther, R.  
Wandartige Träger.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.178, 1966, 159 pp.
- [66.9] Neville, A.M., Arnishaw, J.W., Bunni, N.G.  
The Distribution of Shear in Rectangular Beams.  
Concrete and Constructional Engineering V.61, No.4,5, 1966, pp.119-130, pp.157-161.

- [66.10] Smith, R.B.L.  
Interaction of Moment and Shear on the Failure of Reinforced Concrete Beams Without Web  
Civil Engineering and Public Works Review V.61, No.712,720,721, 1966, Reinforcement,  
pp.723-725, pp.869-872, pp.967-970.
- [66.11] Taylor, F.  
Some Shear Tests on Reinforced Concrete T Beams with Stirrups.  
Magazine of Concrete Research V.18, No.57, 1966, pp.221-228.
- [67.1] Day, H.  
Über die Biege- und Schubverformungen des Stahlbetonträgers.  
Beton- und Stahlbetonbau V.62, H.12, 1967, pp.276-280.
- [67.2] Bjuggren, U.  
Nomenclature for Phenomena of Failure in Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.64, No.10, 1967, pp.625-632.  
el.  
Nomenklatur for brottfenomen hos armerade betongbalkar.  
Nordisk Betong V.9, No.4, 1965, pp.347-360.
- [67.3] Bresler, B., MacGregor, J.G.  
Review of Concrete Beams Failing in Shear.  
ASCE-Proceedings. Journal of the Structural Division V.93, No.ST1, 1967, pp.343-372.
- [67.4] Dillger, W.  
Anfängliche und nachträgliche Durchbiegung infolge Querkraft bei Stahlbetonbalken im  
Beton- und Stahlbetonbau V.62, H.9, 1967, pp.212-217. Zustand II.
- [67.5] Evans, R.H., Kong, F.K.  
Shear Design and British Code CP114.  
The Structural Engineer V.45, No.4, 1967, pp.153-158.
- [67.6] Hagberg, T.  
Forsøg med betongbjælker med spesielle lagerbetingelser.  
Betongtekniske Publikasjoner No.8, 1967, pp.36-55.
- [67.7] Kant, G.N.J.  
How Safe Are Our Large Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.64, No.3, 1967, pp.128-141.  
Discussion.  
ACI-Journal. Proceedings V.64, No.9, 1967, pp.602-613.
- [67.8] Kennedy, R.P.  
A Statistical Analysis of the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
Department of Civil Engineering, Stanford University, Technical Report No.78, 1967, 256 pp.
- [67.9] Kupfer, K.H.  
Zusammenhang zwischen Momentendeckung und Schubsicherung beim schlanken-Plattenbalken.  
Beton- und Stahlbetonbau V.62, H.10, 1967, pp.238-245.
- [67.10] MacGregor, J.G., Walther, J.R.V.  
Analysis of Inclined Cracking Shear in Slender Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.64, No.10, 1967, pp.644-653.
- [67.11] Mayer, H.  
Versuche zum Studium von Grösse und Verteilung der Bügelkräfte im Stahlbeton-Rechteckbalken.  
Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München. Bericht No.72, 1967, 19 pp.
- [67.12] Mehner, A., Freitag, W.  
Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen.  
Der Bauingenieur V.42, H.10, 1967, pp.362-369.
- [67.13] Nielsen, H.P.  
Om forskydningsarmering i jernbetonbjælker.  
Bygningsstatiske Meddelelser V.38, No.2, 1967, pp.33-58.  
Discussion Bygn.Meddelelser V.40, No.1, 1969, pp.55-63.
- [67.14] Ojha, S.K.  
The Shear Strength of Rectangular Reinforced and Prestressed Concrete Beams.  
Magazine of Concrete Research V.19, No.60, 1967, pp.173-184.
- [67.15] Rüsch, H., Mayer, H.  
5 Versuche zum Studium der Verformungen im Querkraftbereich eines Stahlbetonbalkens.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.195, 1967, 43 pp.  
el.  
Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München. Bericht No.58, 1954, 48+78 pp.
- [67.16] Scordelis, A.C., Ngo, D.  
Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.64, No.3, 1967, pp.152-163.
- [67.17] Seabold, R.H.  
Dynamic Shear Strength of Reinforced Concrete Beams-Part II.  
U.S. Naval Civil Engineering Laboratory TP-502, 1967, 87 pp. (DNR AF 644823).

- [67.18] Söpler, B.  
Et litteraturstudium av nyere forsök og forskrifter med hensyn til skjærbrudd i armerte  
Betonglaboratoriet Norges Tekniske Høgskole, C 95, 1967, 90 pp.  
el. kort [68.12]. betongbjelker.
- [67.19] Özden, K.  
An Experimental Investigation on the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
Technical University of Istanbul, 1967, 249 pp.
- [67.20] Sundara Raja Iyengar, K.T., Vijaya Rangan, R.  
A New Theory for the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
The Indian Concrete Journal V.41, No.3, 1967, pp.102-109.
- [68.1] Bachmann, H.  
Der Zugkraftverlauf beim Zwischenaufleger von Stahlbeton-Durchlaufträgern.  
Schweizerische Bauzeitung V.86, H.34, 1968, pp.616-618.
- [68.2] Baumann, T.  
Versuche zum Studium der Verdübelungswirkung der Biegezugbewehrung eines Stahlbetonbalkens.  
Materialprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München, Bericht 77, 1968,  
el. [70.3]. 50 pp.
- [68.3] Fenwick, R.C., Paulay, T.  
Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams.  
ASCE-Proceedings. Journal of the Structural Division V.94, No.ST10, 1968, pp.2325-2350.
- [68.4] Kari, G.N.J.  
Was wissen wir heute über die Schubbruchsicherheit.  
Der Bauingenieur V.43, H.5, 1968, pp.167-174.
- [68.5] Leonhardt, F., Walther, R., Dilger, W.  
Schubversuche an indirekt gelagerten, einfeldrigen und durchlaufenden Stahlbetonbalken.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.201, 1968, 69 pp.  
el. kort  
Leonhardt, F., Walther, R.  
Schubversuche an einfeldrigen und zweifeldrigen Stahlbetonbalken mit indirekter Lagerung.  
Beton- und Stahlbetonbau V.63, H.4, 1968, pp.83-89.
- [68.6] Nordisk Betongforskningskongressen 1968. D18.  
Rathkjen, A.  
Forsøk vedrørende forskydningsbæreevnen af minimumsarmerede jernbetonbjælker.  
Nordisk Betong V.12, No.4, 1968, p.251.
- [68.7] Olesen, S.B.  
Armerede betonbjælkens forskydningsbæreevne.  
Dansk Ingeniørforening, Transactions, No.1, 1968, 16 pp.
- [68.8] Rajagopalan, K.S., Ferguson, P.H.  
Shear Tests Emphasizing Percentage of Longitudinal Steel.  
ACI-Journal. Proceedings V.65, No.8, 1968, pp.634-638.
- [68.9] Ramakrishnan, V., Ananthanarayana, Y.  
Ultimate Strength of Deep Beams in Shear.  
ACI-Journal. Proceedings V.65, No.2, 1968, pp.87-98.
- [68.10] Regan, P.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
Department of Civil Engineering, Imperial College, London, 1968, 164 pp.  
el. kort [69.8].
- [68.11] Swamy, N., Adepegba, D.  
A Criterion of Shear Failure for Reinforced Concrete Beams Without Web Reinforcement.  
Nordisk Betong V.12, No.1, 1968, pp.45-67.
- [68.12] Söpler, B.  
Skjærbrudd i armerte betongbjelker.  
Betongtekniske Publikasjoner, No.9, 1968, pp.12-20.
- [68.13] Taylor, H.P.J.  
Shear Stresses in Reinforced Concrete Beams without Shear Reinforcement.  
Cement and Concrete Association TRA 407, 1968, 23 pp.
- [68.14] Zsutty, T.C.  
Beam Shear Strength Prediction by Analysis of Existing Data.  
ACI-Journal. Proceedings V.65, No.11, 1968, pp.943-951.
- [68.15] Sundara Raja Iyengar, K.T., Vijaya Rangan, R., Palaniswamy, R.  
Some Factors Affecting the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
The Indian Concrete Journal V.42, No.12, 1968, pp.499-505.
- [68.16] Robinson, J.R.  
L'état des recherches de l'I.R.A.B.A. sur les aciers de couture du béton armé.  
Annales, Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics No.246, 1968, pp.1019-1044.
- [68.17] CEB Bulletin No.70, 1968, pp.5-96.  
Conclusions Techniques 12ème Session Plénière Lausanne 1968.

- [69.1] Adepegba, D.  
Charts for Economic Design of Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams.  
Nordisk Betong V.13, No.4, 1969, pp.217-232.
- [69.2] Bay, H.  
Noch einmal: Schubhemessung.  
Beton- und Stahlbetonbau V.64, H.3, 1969, pp.64-69.
- [69.3] Behea, U., Rajagopalan, K.S.  
Two-Piece U-Stirrups in Reinforced Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.66, No.7, 1969, pp.522-524.
- [69.4] Broms, B.B.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
ASCE-Proceedings. Journal of the Structural Division V.95, No.ST6, 1969, pp.1339-1358.
- [69.5] Kani, G.N.J.  
A Rational Theory for the Function of Web Reinforcement.  
ACI-Journal. Proceedings V.66, No.3, 1969, pp.185-197.
- [69.6] Kupfer, H., Baumann, T.  
Staffelung der Biegezugbewehrung bei hohen Schubspannungen in Schlanken Stahlbeton-  
Beton- und Stahlbetonbau V.64, H.12, 1969, pp.278-283. trägern mit I-Querschnitt.
- [69.7] MacGregor, J.G., Hanson, J.M.  
Proposed Changes in Shear Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.66, No.4, 1969, pp.276-288.
- [69.8] Rausch, E.  
Bemerkungen zur Schubsicherung mit Bügeln im Stahlbetonbau.  
Beton- und Stahlbetonbau V.64, H.7, 1969, pp.167-168.
- [69.9] Regan, P.  
Shear in Reinforced Concrete Beams.  
Magazine of Concrete Research V.21, No.66, 1969, pp.31-42.  
el. [68.10]
- [69.10] Regan, P., Placas, A.  
Collapse and Serviceability Criteria in Shear.  
Department of Concrete Structures. Imperial College, London 1969, 23 pp.
- [69.11] Shear Study Group. (Baker, A.L.L. m.f.).  
The Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
The Institution of Structural Engineers. Series No.49, 1969. 167 pp.  
  
Baker, A.L.L., Yu, C.W., Regan, P.E.  
Explanatory Note on the Proposed Unified Code Clause on Shear in Reinforced Concrete Beams  
with Special Reference to the Report of the Shear Study Group.  
The Structural Engineer V.47, No.7, 1969, pp.285-293.
- Tepfers, R., Worth, P.  
Sammenfattning av: The Shear Strength of Reinforced Concrete Beams.  
Chalmers Tekniska Högskola, Inst.f.Konst., Betongbyggnad. Intern skrift 69:6. 1969. 18pp.
- [69.12] Swamy, R.N.  
Shear Failure in Reinforced Concrete Beams without Web Reinforcement.  
Civil Engineering and Public Works Review V.64, No.751,752, 1969, pp.129-145, pp.237-243.
- [69.13] Brøndum-Nielsen, T.  
Betonkonstruktioner I.  
København 1969. 267 pp.
- [69.14] Vijaya Rangan, B.  
Shear Strength of Reinforced Concrete Beams with Uniformly Distributed Loads.  
The Indian Concrete Journal V.43, No.1, 1969, pp.17-24.
- [69.15] Wilby, C.B., Siddiqi, F.R.  
A Statistical Approach to the Random Behaviour of Reinforced Concrete Beams in Shear.  
The Indian Concrete Journal V.43, No.10, 1969, pp.365-370.
- [69.16] CEB-FIP.  
Recommandations Internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton.  
Rédaction Provisoire. 1: Principes et Recommandations, 2: l'annuel d'application.  
Paris 1969, 149+73 pp.  
el.  
[68.15], CEB Bulletin No.70, pp.5-54.

- [70.1] Sørensen, H.C.  
Forskydningsforsøg med 12 jernbetongbjælker med T-tværsnit.  
Danmarks tekniske Højskole, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Report No.20, 1970, 51pp.
- [70.2] Baumann, T., Rüschi, H.  
Schubversuche mit indirekter Krafteinleitung.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.210, 1970, pp.1-41.
- [70.3] Baumann, T., Rüschi, H.  
Versuche zum Studium der Verdübelungswirkung der Biegezugbewehrung eines Stahlbetonbalkens.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.210, 1970, pp.42-83.  
el. [68.2].
- [70.4] Jungwirth, D.  
Elektronische Berechnung des in einem Stahlbetonbalken im gerissenen Zustand auftretenden Kräftezustandes unter besonderer Berücksichtigung des Querkraftbereiches.  
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H.211, 1970,
- [70.5] ACI Committee 318  
Proposed Revision of ACI 318-63: Building Code Requirements for Reinforced Concrete.  
ACI-Journal. Proceedings V.67, No.2, 1970, pp.77-186.
- [70.6] Tichy, M.  
Discontinuity of the Strength in Bending and Shear of Reinforced Beams.  
ACI-Journal. Proceedings V.67, No.3, 1970, pp.249-252.
- [70.7] Smith, R.B.L.  
Shear reinforcement of reinforced concrete beams subject to distributed loading.  
Magazine of Concrete Research V.22, No.70, 1970, pp.17-24.
- [70.8] Swamy, R.N., Andriopoulos, A., Adepegba, D.  
Arch action and bond in concrete shear failures.  
ASCE-Proceedings. Journal of the Structural Division V.96, No.ST6, 1970, pp.1069-1091.



## 5.2 Emnefortegnelse

### Forsøg uden forskydningsarmering

[54.2] [56.1] [57.1] [57.2] [58.1] [60.3] [60.8]  
[62.8] [62.9] [62.16] [63.7] [63.9] [65.1] [66.2]  
[66.5] [66.6] [66.7] [67.7] [67.20] [68.2] [68.4]  
[68.8] [68.13] [68.15] [69.12] [69.15] [70.3]  
[70.8].

### Forsøg med forskydningsarmering

[27.1] [45.2] [49.1] [51.1] [51.2] [54.1] [55.2]  
[56.3] [59.1] [59.3] [60.4] [62.5] [62.9] [62.10]  
[62.13] [63.3] [63.5] [63.6] [64.2] [64.6]  
[64.8] [64.9] [64.12] [64.13] [65.6] [65.9] [66.4]  
[66.11] [67.6] [67.9] [67.11] [67.15] [67.17]  
[67.19] [68.1] [68.5] [68.6] [68.16] [69.3] [69.5]  
[69.6] [70.1] [70.2] [70.7].

### Forsøg med simpelt understøttede bjælker uden forskydnings- armering, hvor belastningen består af en eller to symmetrisk anbragte enkeltkræfter

[54.2] [57.1] [58.1] [60.3] [60.4] [60.8] [62.9]  
[62.16] [63.7] [63.10] [64.2] [66.2] [66.5] [66.6]  
[67.7] [67.20] [68.2] [68.4] [68.8] [68.13] [68.15]  
[69.5] [69.12] [69.15] [70.3] [70.8]

### Forsøg med simpelt understøttede bjælker med forskydnings- armering, hvor belastningen består af en eller to symmetrisk anbragte enkeltkræfter

[27.1] [45.2] [49.1] [51.1] [51.2] [54.1] [55.2]  
[56.3] [62.9] [62.10] [63.3] [63.6] [64.8] [65.9]  
[66.11] [67.15] [67.19] [68.6] [69.3] [70.1].

### Forsøg med jævnt fordelt belastning

[60.3] [62.8] [62.9] [62.13] [66.7] [67.11] [70.7].

Forsøg med kontinuerlige bjælker

[59.3] [62.5] [63.5] [64.6] [66.4] [67.9] [68.1]  
[68.5] [68.16] [69.6].

Forsøg med specielle belastnings- og understøtningsforhold

[56.1] [57.2] [59.1] [60.3] [60.8] [64.9] [64.12]  
[65.6] [67.6] [67.11] [67.17] [68.5] [69.6] [70.2].

Forskydningsteorier for bjælker uden forskydningsarmering

[59.2] [60.1] [60.2] [60.8] [61.1] [62.1] [62.2]  
[62.3] [62.4] [62.6] [62.8] [62.11] [62.12] [62.15]  
[62.16] [64.5] [64.7] [64.11] [65.1] [65.3] [66.3]  
[66.5] [66.6] [66.9] [66.10] [67.8] [67.10] [67.20]  
[68.2] [68.4] [68.10] [68.14] [69.9] [69.14] [70.3].

Forskydningsteorier for bjælker med forskydningsarmering

[1899.1] [12.1] [27.1] [28.1] [45.1] [56.2] [59.2]  
[61.1] [62.1] [62.3] [62.14] [63.11] [63.12] [64.14]  
[65.7] [65.13] [67.8] [67.13] [67.14] [68.10] [69.1]  
[69.5] [69.9].

Beskrivende

[27.1] [52.1] [55.1] [60.5] [60.6] [60.7] [62.1]  
[62.7] [62.14] [63.2] [63.8] [63.9] [64.1] [64.4]  
[64.8] [64.10] [64.12] [64.13] [64.14] [65.2] [65.5]  
[65.8] [65.11] [65.12] [66.1] [67.1] [67.2] [67.3]  
[67.4] [67.16] [67.18] [68.3] [68.7] [68.11] [68.12]  
[68.15] [69.2] [69.4] [69.8] [69.10] [69.11] [69.13]  
[70.6] [70.8].

Normer

[52.1] [60.9] [61.2] [62.1] [62.14] [62.17] [64.14]  
[65.13] [66.1] [67.5] [67.18] [68.17] [69.7] [69.11]  
[69.13] [69.16] [70.5]

Korte bjælker

[63.1] [63.4] [64.3] [64.13] [65.4] [65.10] [66.8]  
[67.12] [68.9].

## Appendix A

### Den forventede bøjningsbrudlast

Det teoretiske bøjningsbrudmoment er beregnet af følgende formler, idet der f.eks. kan henvises til Brøndum-Nielsen [69.13]

$$M_F = A_a \sigma_{af} z = A_a \sigma_{af} h \frac{z}{h} \quad (\text{A.1})$$

hvor

$$\frac{z}{h} = 1 - \frac{1}{2} \frac{A_a \sigma_{af}}{b h \sigma_c} = 1 - \frac{1}{2} \bar{w}_o \frac{\sigma_{af}}{\sigma_c} \quad (\text{A.2})$$

Den forventede bøjningsforskydningsspænding  $\tau_F$  bliver herefter for simpelt understøttede bjælker belastet af to symmetriske enkeltkræfter i afstanden  $a$  fra understøtningen

$$\begin{aligned} \tau_F &= \frac{T_F}{b_o h} = \frac{M_F}{b_o h a} = \frac{A_a}{b_o h} \frac{h}{a} \frac{z}{h} \sigma_{af} \\ &= \bar{w}_{ao} \frac{h}{a} \frac{z}{h} \sigma_{af} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

I ovenstående er det for T-bjælker forudsat, at betontrykzonens højde ikke er større end flangens tykkelse.

## Appendix B

### Undersøgelse af forskydningsbæreevnen som funktion af bøjlevinklen

#### Indledning

I afsnit 4.4.1 er der omtalt resultaterne fra nogle forsøg, hvor bøjlevinklen  $\alpha$  er varieret. Disse forsøg antyder, at der for konstant  $\bar{m}_{to}$   $\sigma_{tf}$  findes en værdi af  $\alpha$  i intervallet  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ , hvor forskydningsbrudlasten er størst (forsøg af Moretto [45.2] med  $\alpha = 45^\circ$ ,  $67\frac{1}{2}^\circ$  og  $90^\circ$ ). Det er som nævnt i afsnit 4.4.1 imidlertid mere uvist, om skråbøjler, hvor  $\alpha = 45^\circ$ , eller normalbøjler er de mest effektive, når der ellers ikke er fare for kroptrykbrud. Da forskellen i forskydningsbrudlast for bjælker armeret med skråbøjler, respektive normalbøjler alt andet lige kun andrager omkring 10-20%, er det på grund af den relativ store spredning ved forskydningsforsøg ikke muligt at vurdere disse forhold nøjere på grundlag af det ringe forsøgsmateriale. Flere forsøg, hvor kun bøjlevinklen varieres, er derfor nødvendige.

I de følgende afsnit er der foretaget en undersøgelse af bøjlevinklens indflydelse på den teoretiske forskydningsbæreevne i henhold til de i afsnit 4 omtalte beregningsanvisninger. I den forbindelse er nogle af disse formler af forfatteren udvidet til også at omfatte bøjlearmering, hvor  $\alpha$  er forskellig fra  $90^\circ$ .

#### B.1 Modificeret Gitteranalogi

Forskydningsbæreevnen ved skråbøjler er jfr. (4.6) og (4.20), idet  $\cot\theta \neq 1$  også betragtes

$$\tau = \frac{T}{b_0 h} = \tau_{cr} + \bar{m}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot\theta + \cot\alpha) \quad (B.1)$$

Når  $\tau_{cr}$  og  $\theta$  regnes uafhængige af  $\alpha$ , findes maksimalværdien

af  $\tau$  som funktion af  $\alpha$  af

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} &= \bar{\omega}_{to} \sigma_t (2 \sin \alpha \cos \alpha \cot \theta + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \bar{\omega}_{to} \sigma_t (\sin 2\alpha \cot \theta + \cos 2\alpha) = 0\end{aligned}\quad (B.2)$$

Det ses, at  $\tau$  antager sin maksimale værdi for  $\alpha = \alpha_m = \frac{1}{2} (\pi - \theta)$

$$\tau(\alpha_m) = \tau_{cr} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{to} \sigma_t \tan \alpha_m \quad (B.3)$$

På fig. B.1 er som funktion af  $\frac{\tau_{cr}}{\bar{\omega}_{to} \sigma_t}$  optegnet

$\tau(\alpha_m)/\tau(\pi/2)$  og  $\tau(\pi/4)/\tau(\pi/2)$  for  $\cot \theta$  lig 1 respektive 2. Det fremgår heraf, at der for  $\theta = 45^\circ$  vindes 10-20% i teoretisk bæreevne ved at indlægge skråbøjler med hældningen

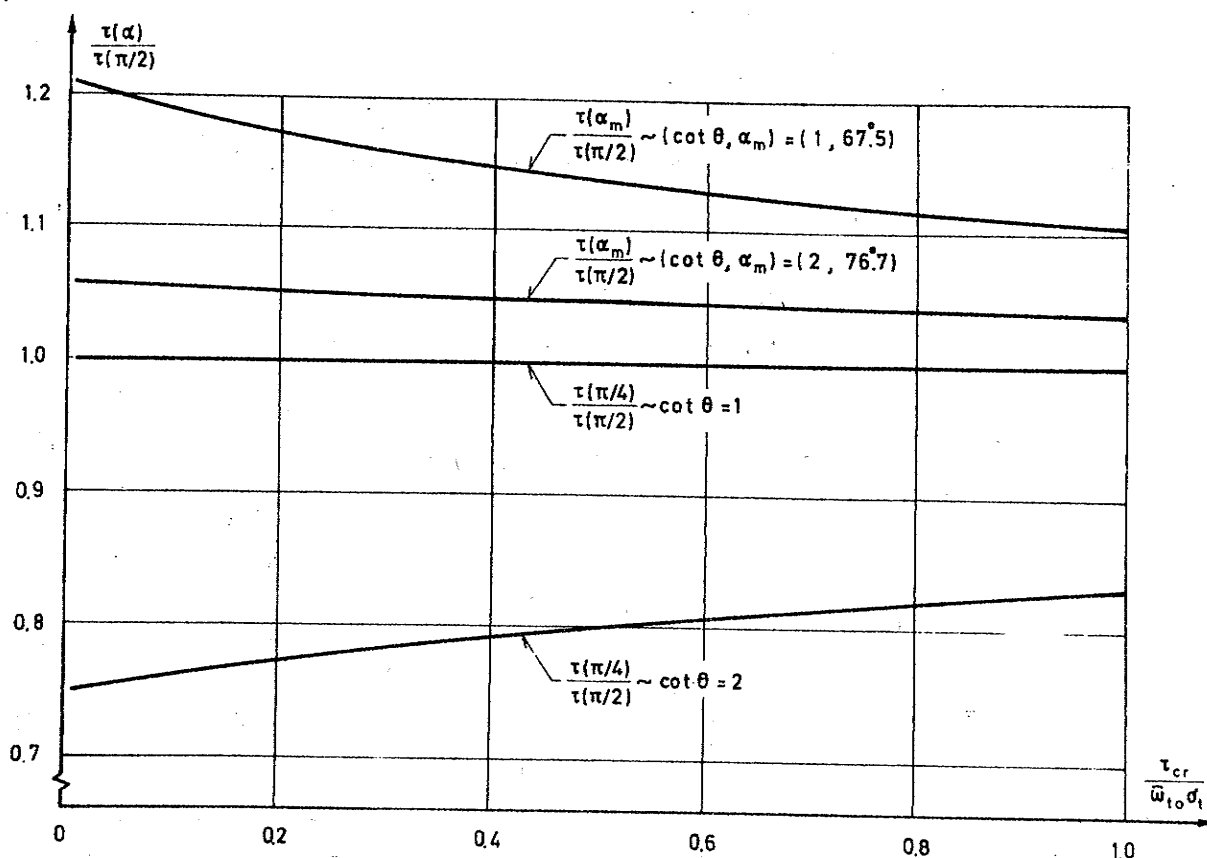


Fig. B1 Modificerede Gitteranalogi.  
Forskydningsbæreevnen for skråbøjler i forhold  
til forskydningsbæreevnen for normalbøjler.

$\alpha_m = 67\frac{1}{2}^\circ$  i forhold til anvendelse af normalbøjler. Skråbøjler med  $\alpha = 45^\circ$  og normalbøjler giver derimod samme bæreevne i henhold til denne teori.

## B.2 Grozdev, Hillerborg

Udvides Grozdevs formel (4.24) til også at omfatte skråbøjler, bliver forskydningsbæreevnen, idet korrektionsledet svarende til (4.29) er medtaget

$$\tau = \kappa \tan \theta + \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) - \bar{w}_{to} \sigma_t \frac{t}{h} \sin^2 \alpha \quad (B.4)$$

Minimalværdien findes, som det er beskrevet i afsnit 4.5.2. Den kritiske diagonalrevnehældning bliver

$$\cot \theta_m = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\kappa}{\bar{w}_{to} \sigma_t}} \quad (B.5)$$

Indsat i (B.4) findes minimumsværdien  $\tau_m$  til

$$\tau_m = \min \left[ \frac{T}{b_o h} \right] = 2 \sin \alpha \sqrt{\kappa \bar{w}_{to} \sigma_t} + \bar{w}_{to} \sigma_t (\sin \alpha \cos \alpha - \frac{t}{h} \sin^2 \alpha) \quad (B.6)$$

Når  $\tau$  opfattes som funktion af  $\alpha$  findes den største værdi af  $\alpha$  af ligningen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_m}{\partial \alpha} &= 2 \cos \alpha \sqrt{\kappa \bar{w}_{to} \sigma_t} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2 \frac{t}{h} \sin \alpha \cos \alpha) \bar{w}_{to} \sigma_t \\ &= \bar{w}_{to} \sigma_t \left( \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\kappa}{\bar{w}_{to} \sigma_t}} + \cos 2\alpha - \frac{t}{h} \sin 2\alpha \right) = 0 \end{aligned} \quad (B.7)$$

Det ses, at når  $\frac{t}{h} = 0$  antager  $\tau_m$  sin maksimale værdi for  $\alpha = \alpha_m = \frac{1}{2} (\pi - \theta_m)$ .  $\alpha_m$  findes i dette tilfælde af ligningen

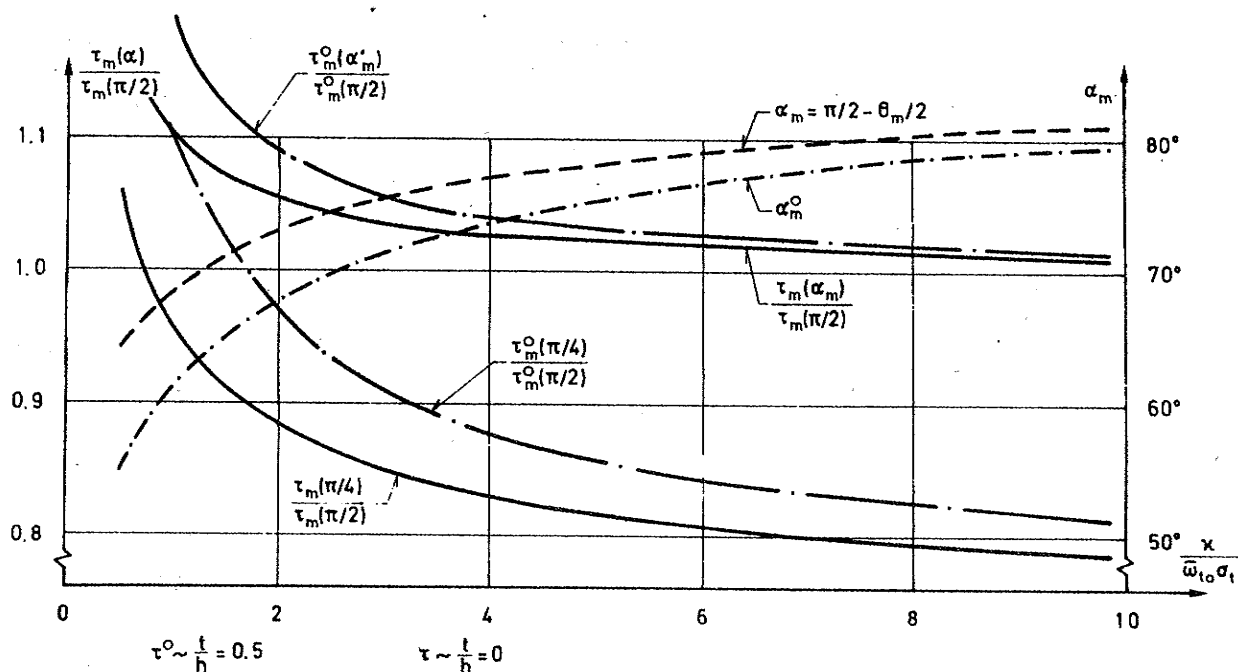


Fig. B2 Gvozdev, Hillerborg.  
Forskydningsbæreevnen for skråbøjler i forhold  
til forskydningsbæreevnen for normalbøjler.

$$\cos \alpha_m = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\kappa}{\bar{\omega}_{to} \sigma_t} + 2} - \sqrt{\frac{\kappa}{\bar{\omega}_{to} \sigma_t}} \right) \quad (B.8)$$

For  $\frac{t}{h} \neq 0$  kan  $\cos \alpha_m$  ikke angives explicit.

På fig. B.2 er som funktion af  $\frac{\kappa}{\bar{\omega}_{to} \sigma_t}$  optegnet  $\tau_m(\alpha_m)/\tau_m(\pi/2)$  og  $\tau_m(\pi/4)/\tau_m(\pi/2)$  for  $\frac{t}{h} = 0$ . Endvidere er der optegnet de tilsvarende kurver for  $\frac{t}{h} = \frac{1}{2}$ , idet  $\tau_m$  og  $\alpha_m$  her er betegnet  $\tau_m^0$  henholdsvis  $\alpha_m^0$ . Værdierne af  $\alpha_m$  og  $\alpha_m^0$  er også anført på figuren. Det fremgår af figuren, at gevinsten ved at indlægge skråbøjler med den optimale hældning i forhold til normalbøjler i henhold til disse teorier er ubetydelig. Derimod ses det, at bjælker med bøjler, hvor  $\alpha = 45^\circ$ , ifølge dette har 10-15% mindre teoretisk bæreevne end tilsvarende bjælker med normalbøjler, når forskydnings-

armeringen er svag (stor  $\frac{\eta}{\bar{w}_{to} \sigma_t}$ ). Ved aftagende  $\frac{\eta}{\bar{w}_{to} \sigma_t}$ , hvor der er fare for kroptrykbrud, ses det, at skråbøjler med  $\alpha = 45^\circ$  bliver mere effektive end normalbøjler, hvilket også er i overensstemmelse med forskydningsforsøg, jfr. afsnit 4.3.5.

### B.3 Forskydningstrykbrudteori

For skråbøjler findes svarende til (4.33) ved anvendelse af (4.7)

$$\mu = \frac{M}{b_o h^2} = \eta \tan \theta + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)^2 \quad (B.9)$$

Den kritiske diagonalrevnehældning  $\theta = \theta_m$  findes her af ligningen

$$\frac{\partial \mu}{\partial \cot \theta} = -\eta \tan^2 \theta + \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) = 0 \quad (B.10)$$

Når den kritiske diagonalhældning indsættes i (B.9) findes minimalværdien  $\mu_m$ . Når  $\mu_m$  opfattes som funktion af  $\alpha$ , vil  $\mu_m$  for konstant  $\bar{w}_{to} \sigma_t$  have en maksimalværdi for  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Denne findes ved differentiation af (B.9), idet (B.10) samtidig anvendes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_m}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t (2 \sin \alpha \cos \alpha (\cot \theta + \cot \alpha)^2 - (\cot \theta + \cot \alpha)) \\ &= \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2 \alpha (\cot \theta + \cot \alpha) (\cot \alpha \cot \theta - 1) \end{aligned} \quad (B.11)$$

Det ses heraf, at  $\mu_m$  har maksimum for  $\alpha_m = \pi/2 - \theta_m$ . Indsættes denne værdi i (B.10) findes at  $\theta_m$  for  $\alpha = \alpha_m$  er den samme, som  $\theta_m$  beregnet for  $\alpha = 90^\circ$ . Den maksimale værdi af  $\mu_m$  bliver

$$\mu_m (\alpha_m) = \frac{3}{2} (\eta)^{\frac{2}{3}} (\bar{w}_{to} \sigma_t)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \bar{w}_{to} \sigma_t \quad (B.12)$$

På fig. B.3 er  $\mu_m$  som funktion af  $\frac{\eta}{\bar{w}_{to} \sigma_t}$  optegnet



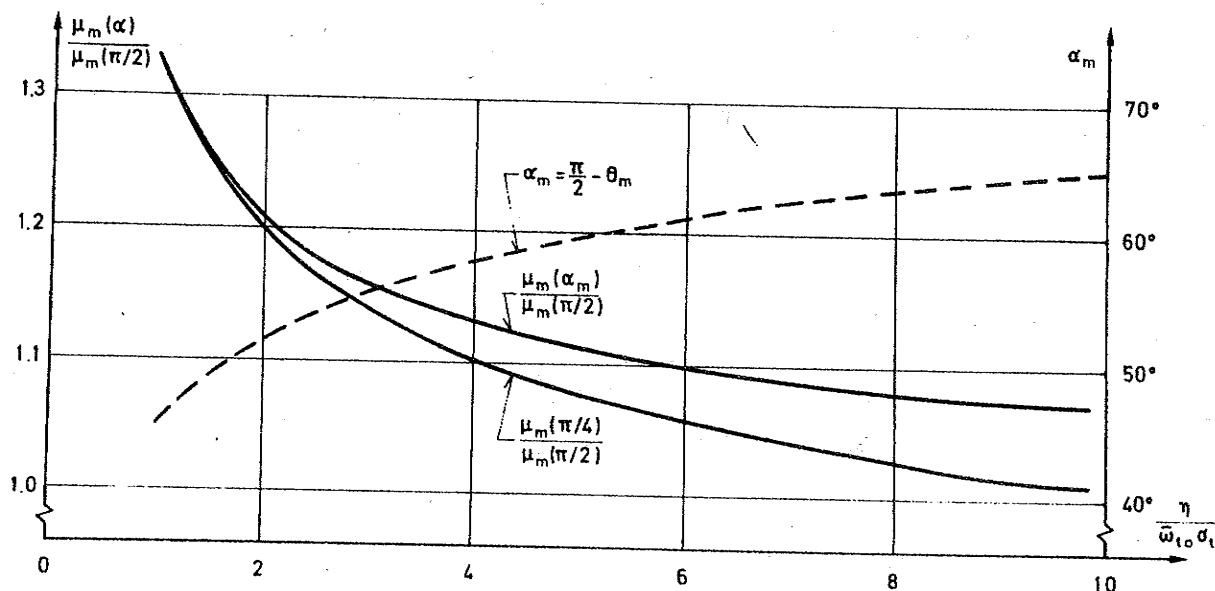


Fig. B3 Forskydningstrykbrudteori.  
Forskydningsbæreevnen for skråbøjler i forhold  
til forskydningsbæreevnen for normalbøjler.

$\mu_m(\alpha_m)/\mu_m(\pi/2)$  og  $\mu_m(\pi/4)/\mu_m(\pi/2)$ . Endvidere er værdien af  $\alpha_m$  angivet. Det fremgår heraf, at bjælker med bøjler, hvor  $\alpha = 45^\circ$ , ifølge denne teori har 5-20% højere teoretisk forskydningsbæreevne end bjælker med normalbøjler. Endvidere ses det, at der ikke er større forskel på at anvende bøjler, hvor  $\alpha = \alpha_m$  end bøjler, hvor  $\alpha = 45^\circ$ .

Ovenstående er i modstrid med, hvad der er omtalt i afsnit 4.4.1 om betydningen af skråbøjler i forhold til normalbøjler. Dette skyldes muligvis, at  $M_b$  antages lig  $N_a \cdot z$  (4.7), hvorved der ikke i tilstrækkelig grad tages hensyn til, at  $N_a$  aftager ved aftagende  $\alpha$ , jfr. afsnit 4.3.2.

#### B.4 Plasticitetsteori

Udvides formelen (4.45), der er baseret på den maksimalt tilladte diagonalrevnehældning, til også at omfatte skråbøjler, findes af (4.10)

$$\cot\theta = \frac{1}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_b}{\bar{w}_{to} \sigma_t} - \sin^2\alpha} \quad (\text{B.13})$$

Indsættes (B.13) i (4.6), idet  $T_a = T_b = 0$  (svarende til (4.39)) findes forskydningsbæreevnen til

$$\tau' = \frac{T}{b_o z} = \bar{w}_{to} \sigma_t \sin\alpha \left( \sqrt{\frac{\sigma_b}{\bar{w}_{to} \sigma_t} - \sin^2\alpha} + \cos\alpha \right) \quad (\text{B.14})$$

Når  $\cot\theta$  efter (B.13) bliver større end  $\frac{a}{z}$ , skal værdien  $\cot\theta = \frac{a}{z}$  indsættes, hvilket giver

$$\tau' = \frac{T}{b_o z} \leq \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2\alpha \left( \frac{a}{z} + \cot\alpha \right) \quad (\text{B.15})$$

Opfattes  $\tau'$  som funktion af  $\alpha$ , findes, når  $\cot\theta > 1$ , at  $\tau'$  har maksimum i intervallet  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Maksimumværdien af  $\alpha$  findes af ligningen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau'}{\partial \alpha} &= \bar{w}_{to} \sigma_t (\cos\alpha (\sin\alpha \cot\theta + \cos\alpha) \\ &\quad - \sin\alpha \left( \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\sin\alpha \cot\theta} + \sin\alpha \right)) \\ &= \bar{w}_{to} \sigma_t \sin^2\alpha \tan\theta (\cot\theta \cot\alpha - 1)(\cot\theta + \cot\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

idet der er differentieret gennem  $\cot\theta$ . Det ses, at maksimalværdien antages for  $\alpha = \alpha_m = \pi/2 - \theta_m$ . Maksimalværdien bliver

$$\tau'(\alpha_m) = \sqrt{\bar{w}_{to} \sigma_t \sigma_b} \quad (\text{B.17})$$

Det bemærkes, at dette udtryk har samme form, som Gvozdevs formel (4.28) for  $\alpha = 90^\circ$ .

Ved relativ svag forskydningsarmering begrænses  $\cot\theta$  af  $\frac{a}{z} = \cot\theta_o$ , og maksimalværdien af  $\tau'$  findes her for  $\alpha_m = \frac{1}{2}(\pi - \theta_o)$ , jfr. afsnit B.2).

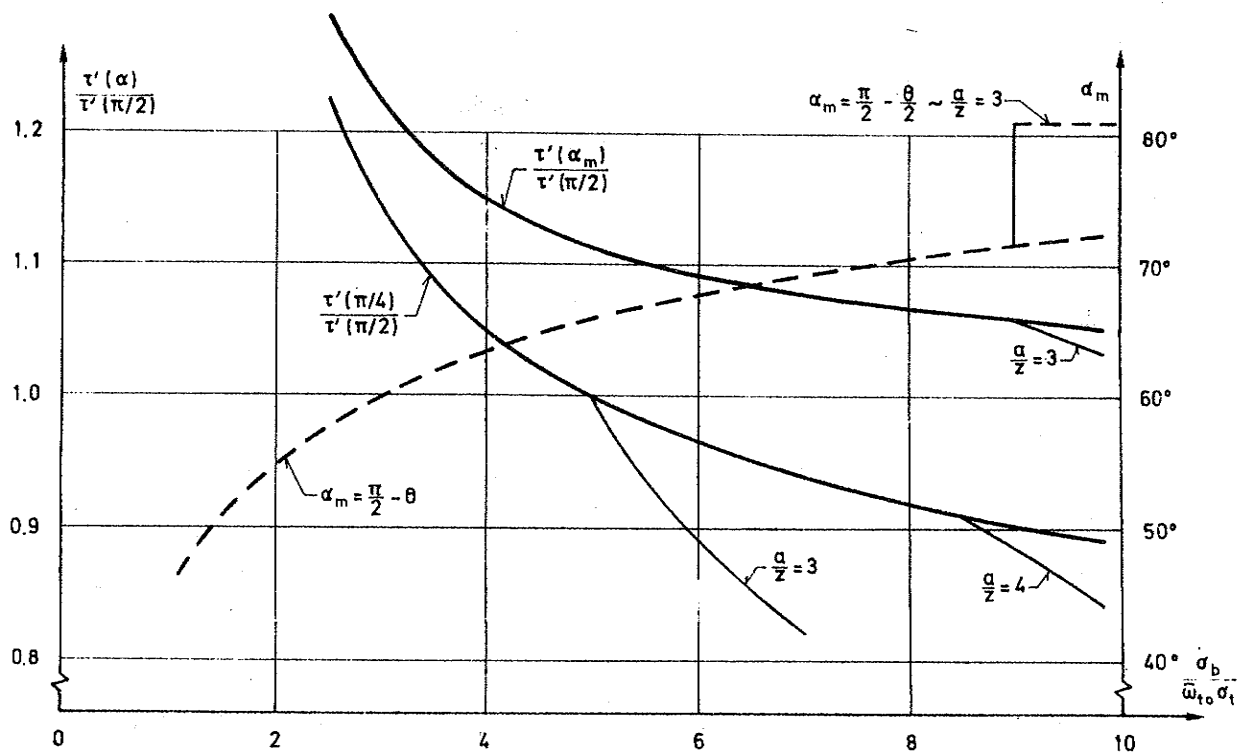


Fig. B4 Plasticitetsteori.  
Forskydningsbæreevnen for skråbøjler i forhold  
til forskydningsbæreevnen for normalbøjler.

På fig. B.4 er som funktion af  $\frac{\sigma_b}{\sigma_t}$  optegnet  $\tau'(\pi/4)/\tau'(\pi/2)$ . Endvidere er værdierne af  $\alpha_m$  angivet. Det fremgår heraf, at forskydningsbæreevnen ifølge denne teori er større for skråbøjler ( $\alpha = 45^\circ$ ) end for normalbøjler ( $\alpha = 90^\circ$ ), hvor der er fare for kroptrykbrud (aftagende  $\frac{\sigma_b}{\sigma_t}$ ). Dette er i overensstemmelse med forsøg. Endvidere ses det, at  $\frac{a}{2}$ -forholdet ved en relativ svag forskydningsarmering ofte vil begrænse anvendelsen af (B.14).

## B,5 Resumé

Af de foregående afsnit fremgår det, at alle de undersøgte beregningsformler angiver, at der for fastholdt  $\bar{u}_{t0}$   $\sigma_t$  findes en optimal bøjlevinkel i intervallet  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Gevinsten ved at anvende bøjler med denne hældning i forhold til at anvende normalbøjler er alt andet lige omkring 5-20%, under forudsætning af, at der kan ses bort fra kroptrykbrud.

Forholdet mellem anvendelse af bøjler med  $\alpha = 45^\circ$  og normalbøjler er derimod mindre afklaret. For relativ svag forskydningsarmering giver kun Regans formel en fordel for skråbøjler, hvilket formodentlig skyldes de specielle forudsætninger, der er gjort ved denne formels udledning.

Da forskellen i den teoretiske forskydningsbrudlast for de undersøgte bøjlehældninger imidlertid er af samme størrelsesorden som spredningen ved de eksisterende forskydningsforsøg, er det ikke muligt på grundlag af dette forsøgsmateriale at drage nogen slutning om, hvilket beregningsudtryk der ved relativ svag forskydningsarmering er bedst i overensstemmelse med praksis.

Ved en relativ kraftig forskydningsarmering, hvor der er fare for kroptrykbrud, er alle beregningsformler undtagen den Modificerede Gitteranalogi i overensstemmelse med forsøg, - jfr. afsnit 4.4.1., hvoraf det fremgår, at skråbøjler under  $45^\circ$  bedre er i stand til at hindre kroptrykbrud end normalbøjler.

## Summary

This thesis discusses the problem of reinforced concrete beams subjected to combined bending and shear. The study is based on theoretical work and tests, mainly carried out between 1960 and 1969.

Chapter 2 deals with diagonal cracking. Two types are discussed, 1) flexure-shear cracks, which are the most common type; and 2) shear-tension cracks, which are found only in T- and I-beams. In both types of beam, diagonal cracks form when the principal tensile stresses in the concrete exceed the tensile strength of the concrete. At the formation of flexure-shear cracks, the nominal shear stress  $\tau_{cr}$  is approximately dependent on the concrete tensile strength, the longitudinal reinforcement and the moment/shear ratio, in accordance with formula (2.38) (proposed by Zsutty). When shear-tension cracks form, only the concrete tensile strength influences  $\tau_{cr}$ . Web reinforcement in the form of stirrups has no effect on the load at which diagonal cracks occur, whereas bent-up bars may cause them to develop prematurely.

Chapter 3 deals with shear failure in beams without web reinforcement. In practice, the shear failure load must be equated with the inclined cracking load. In general, the failure occurs suddenly and without warning. Only shear compression theories are dealt with.

Chapter 4 deals with shear failure in beams with web reinforcement. The use of bent-up bars is not advisable because of the danger of partial punching failure in the web. It is pointed out that this type of shear reinforcement is generally over-estimated by about 40%. The shear failure load can be considered as approximately consisting of two contributions: one from shear stresses in the compression zone, and one from tensile stresses in the web reinforcement. These two contributions are not independent, being related through the crack angle (less than  $45^\circ$ ). The ultimate load can be calculated approximately using a Modified Truss Analogy, where the contribution from the compression zone should be calculated as being equal to the diagonal cracking load, and the contribution from the stirrups calculated with a crack angle equal to  $45^\circ$  and with yielding in the stirrups.

No tests appear to have been reported in the following four fields: 1) the influence of inclined stirrups when there is no danger of web crushing failure, 2) the use of stirrups with a high yield strength (greater than  $4500 \text{ kp/cm}^2$ ), 3) the shear failure load when the anchorage zone is relatively short (including indirect support), and 4) the influence of repeated loading greater than the diagonal cracking load.

Appendix B deals with the theoretical shear failure load as a function of the angle  $\alpha$  of the inclined stirrups. Some of these theories are generalized whereby they also cover inclined stirrups. In the case of all the formulae, the theoretical shear failure load has a maximum at  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  when the shear reinforcement ratio  $\bar{w}_{t0}$  is maintained.

The notation in this thesis is mostly in accordance with that of CEB.

Structural Research Laboratory  
Technical University of Copenhagen, Denmark

REPORTS

- R 1. Askegaard, Vagn and P. Thoft-Christensen: Spændingsoptiske lag og tøjningsmålere. 1967.
- R 2. Møllmann, H.: The Principle of Virtual Work for Continuous Systems Derived by a Direct Method. 1968.
- R 3. Askegaard, Vagn: Production and Application of Model Materials with Desired Physical Constants. 1968.
- R 4. Møllmann, H.: The Analysis of Shallow Cables. 1968.
- R 5. Dyrbye, Claës: Damped Vibrations of Slender Beams. 1968.
- R 6. Møllmann, H.: Analysis of Plane Prestressed Cable Structures. 1969.
- R 7. Nielsen, Leif Otto: Beregning af bjælker og rammer dynamisk påvirket ud over det elastiske område. 1968.
- R 8. Bræstrup, Mikael W.: On the Theory of Plastic Plates. 1969.
- R 9. Nielsen, Leif Otto: Uniqueness Problems and Minimum Principles in the Dynamic Theory of Plasticity. 1969.
- R 10. Byskov, Esben: Two Nearly Polygonal Holes. Mathematical Crack Problems. 1969.
- R 11. Bræstrup, Mikael W.: The Cosserat Surface and Shell Theory. 1970.
- R 12. Askegaard, Vagn: Anvendelse af modelanalyse. 1970.
- R 13. Solnes, Julius: The Spectral Character of Earthquake Motions.
- R 14. Bræstrup, Mikael W.: Yield Lines in Discs, Plates and Shells. 1970.
- R 15. Møllmann, H.: Beregning af hængekonstruktioner ved hjælp af deformationsmetoden. 1970.
- R 16. Byskov, Esben: The Calculation of Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method with Cracked Elements. 1970.





- R 17. Askegaard, V.: Grundlaget for adhæsion. 1970.
- R 18. Summaries of Lecture Notes on Experimental Stress Analysis. 1970.
- R 19. Sørensen, Hans Christian: Forskydning i jernbetonbjælker. 1970.
- R 20. Sørensen, Hans Christian: Forskydningsforsøg med 12 jernbetonbjælker med T-tværsnit. 1970.

